EJERCICIO A

PROBLEMA 3. Consideramos los planos

$$\pi_1 : \quad x + y - 6 = 0$$
$$\pi_2 : \quad 2x + 4y + \lambda z + 2 = 0$$

donde λ es un parámetro real. Se pide:

a) Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta de intersección de los planos π_1 y π_2 cuando $\lambda = 4$. *(1,5 puntos)*

b) Calcular razonadamente λ para que los planos π_1 y π_2 se corten formando un ángulo de 45º. *(1,8 puntos)*

Solución:

a) Para $\lambda = 4$ *el plano* π_2 *será: 2 x + 4 y + 4 z + 2 = 0; simplificando por 2 queda x + 2 y + 2 z + 1 = 0*

La ecuación de la recta r intersección de estos dos planos será, en forma implícita,

$$r : \begin{cases} x + y - 6 = 0 \\ x + 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta r las obtenemos resolviendo el sistema anterior,

$$como \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \ usamos \ como \ incógnitas \ principales \ x \ e \ y,$$

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x + 2y = -1 - 2z \end{cases} \qquad *(-1) \begin{cases} -x - y = -6 \\ x + 2y = -1 - 2z \end{cases} \quad sumando \quad y = -7 - 2z$$

sustituyendo el valor de y en la 1ª ecuación, x – 7 – 2 z = 6; despejando x, x = 13 + 2 z

Las ecuaciones paramétricas de r serán,

$$r : \begin{cases} x = 13 + 2\mu \\ y = -7 - 2\mu \quad \mu \in \Re \\ z = \mu \end{cases}$$

b) π_1 *y* π_2 *se cortarán formando un ángulo de 45º cuando sus vectores ortogonales también lo formen,*

$$\overrightarrow{n_1}(1,1,0) \quad y \quad \overrightarrow{n_2}(2,4,\lambda)$$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}}\right) = \frac{\overrightarrow{n_1}\ \overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}$$

$$\cos 45º = \frac{(1,1,0)\ (2,4,\lambda)}{\sqrt{1+1}\ \sqrt{4+16+\lambda^2}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2+4}{\sqrt{2}\ \sqrt{20+\lambda^2}}$$

$$\sqrt{2}\ \sqrt{2}\ \sqrt{20+\lambda^2} = 12$$

$$2\ \sqrt{20+\lambda^2} = 12$$

$$\sqrt{20+\lambda^2} = 6$$

Elevando ambos miembros de la igualdad al cuadrado,

$$20 + \lambda^2 = 36 \quad \to \quad \lambda^2 = 16 \quad \to \quad \lambda = \pm\sqrt{16} \quad \to \quad \lambda = \pm 4$$

Comprobamos las soluciones obtenidas en la ecuación irracional

Para $\lambda = 4 \quad \rightarrow \quad \sqrt{20+4^2} = 6; \quad \sqrt{20+16} = 6; \quad \sqrt{36} = 6$ *Sí*

Para $\lambda = -4 \quad \rightarrow \quad \sqrt{20+(-4)^2} = 6; \quad \sqrt{20+16} = 6; \quad \sqrt{36} = 6$ *Sí*

Ambos planos se cortarán formando un ángulo de 45º cuando $\lambda = -4$ *o* $\lambda = 4$.