

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. Dado el sistema de ecuaciones lineales:
$$\begin{cases} x + y + z = \lambda \\ 2x + 3y + 5z = 2 \\ 3x + 5y + \lambda^2 z = 1 \end{cases}$$
, dependiente del parámetro λ , se pide:

- Determinar para qué valores de λ el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible. (1,3 puntos)
- Obtener el conjunto S de las soluciones del sistema para el caso compatible indeterminado. (1 punto)
- Obtener el vector de S ortogonal (perpendicular) al vector $(1,1,2)$. (1 punto)

Solución:

i) La matriz ampliada del sistema es

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & \lambda^2 & 1 \end{array} \right)$$

El máximo rango posible de A y A' es 3, estudiamos el rango de A

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & \lambda^2 \end{vmatrix} = 3\lambda^2 + 15 + 10 - 9 - 25 - 2\lambda^2 = \lambda^2 - 9$$

$$\lambda^2 - 9 = 0 \rightarrow \lambda^2 = 9 \rightarrow \lambda = \pm\sqrt{9} \rightarrow \lambda = \pm 3$$

Para $\lambda \neq -3$ y $\lambda \neq 3$, $\text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A') = n^\circ$ de incógnitas, Sistema Compatible Determinado.

Para $\lambda = -3$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 9 & 1 \end{array} \right)$$

Sabemos que $\det(A) = 0$, calculemos el rango de A ,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

Veamos el rango de A' , al menor anterior le orlamos la 4ª columna y la 3ª fila,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 30 + 6 + 27 - 10 - 2 = -6 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3$$

Como $\text{ran}(A) = 2 \neq 3 = \text{ran}(A')$, Sistema Incompatible

Para $\lambda = 3$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 9 & 1 \end{array} \right)$$

Al igual que calculamos en el caso anterior $\text{ran}(A) = 2$

Veamos el de A'

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 30 + 6 - 27 - 10 - 2 = 39 - 39 = 0$$

como no hay más menores de orden 3 de A' , $\text{ran}(A') = 2$

Como $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A') < n^\circ$ incógnitas, Sistema Compatible Indeterminado

En resumen,

Para $\lambda \neq -3$ y $\lambda \neq 3$, Sistema Compatible Determinado.

Para $\lambda = -3$, Sistema Incompatible

Para $\lambda = 3$, Sistema Compatible Indeterminado

- ii) El sistema es compatible indeterminado para $\lambda = 3$, el menor que da el rango 2 es el formado por 1ª y 2ª fila y 1ª y 2ª columna, luego las incógnitas principales serán x e y ; para resolver el sistema usaremos la 1ª y 2ª ecuación. Es decir:

$$\begin{cases} x + y = 3 - z \\ 2x + 3y = 2 - 5z \end{cases}$$

En el apartado anterior ya calculamos el determinante del sistema,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1$$

Resolviendo el sistema por la regla de Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 - z & 1 \\ 2 - 5z & 3 \end{vmatrix}}{1} = 9 - 3z - 2 + 5z = 7 + 2z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 - z \\ 2 & 2 - 5z \end{vmatrix}}{1} = 2 - 5z - 6 + 2z = -4 - 3z$$

Para $\lambda = 3$ el conjunto, S , de soluciones del sistema es:
$$\begin{cases} x = 7 + 2\mu \\ y = -4 - 3\mu \\ z = \mu \end{cases} \quad \mu \in \mathfrak{R}$$

- iii) Los vectores de S son de la forma $(7 + 2\mu, -4 - 3\mu, \mu)$.

El que sea ortogonal al vector $(1, 1, 2)$ debe cumplir:

$$(7 + 2\mu, -4 - 3\mu, \mu) \cdot (1, 1, 2) = 0$$

$$7 + 2\mu - 4 - 3\mu + 2\mu = 0$$

$$\mu + 3 = 0 \rightarrow \mu = -3$$

El vector buscado es $(1, 5, -3)$