

EJERCICIO B

PROBLEMA 4. Calcular, razonadamente, el área de la región limitada por las curvas $y = x^2$ e $y = \frac{2}{1+x^2}$

Solución:

Puntos de corte entre las dos curvas,

$$x^2 = \frac{2}{1+x^2}$$

$$x^2 + x^4 = 2$$

$$x^4 + x^2 - 2 = 0$$

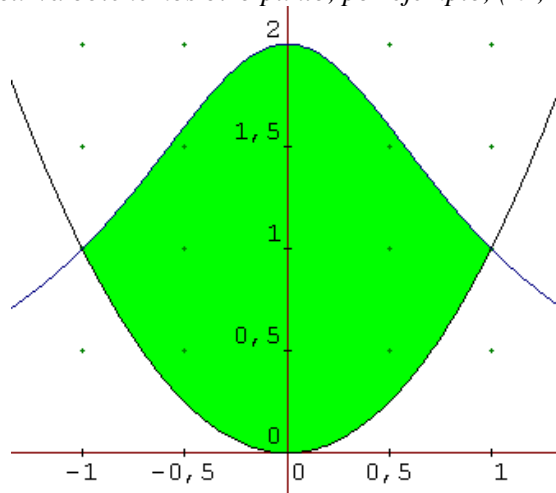
Resolvamos esta ecuación por Ruffini,

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & 2 & \underline{0} \\ -1 & & -1 & 0 & -2 & \\ \hline & 1 & 0 & 2 & \underline{0} & \end{array}$$

$$x^2 + 2 = 0 \quad \text{no tiene raíces reales}$$

Ambas curvas se cortan en los puntos $(1, 1)$ y $(-1, 1)$

$y = x^2$ es una parábola; de la otra curva obtenemos otro punto, por ejemplo, $(0, 2)$. La representación gráfica será:



El área de la región limitada por las dos curvas en la zona verde, la obtendremos a partir de la siguiente integral definida,

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^1 \left(\frac{2}{1+x^2} - x^2 \right) dx = \left[2 \operatorname{arctg} x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \left[2 \operatorname{arctg} 1 - \frac{1^3}{3} \right] - \left[2 \operatorname{arctg} (-1) - \frac{(-1)^3}{3} \right] = \\ &= 2 \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} - 2 \left(\frac{-\pi}{4} \right) + \frac{-1}{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} = \pi - \frac{2}{3} = 2,474926 \end{aligned}$$

El área pedida es $\left(\pi - \frac{2}{3} \right)$ u.a.