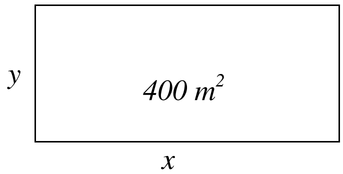
EJERCICIO A

PROBLEMA 2. En una gran pradera se tiene que vallar una zona de 400 m^2, que debe tener forma de rectángulo. Cada metro de valla cuesta 100 euros. Si x es la medida en metros de uno de sus lados, se pide:
a) Obtener razonadamente la función F tal que F(x) sea el coste de la valla, indicando entre qué valores puede variar x *(1,3 puntos).*
b) Deducir razonadamente el valor de x para el que la función f(x) alcanza el valor mínimo *(2 puntos).*

Solución:

a) La zona a vallar es el rectángulo:



La relación entre x e y viene dada por el área del rectángulo, x . y = 400 $\quad y=\dfrac{400}{x}$

Para obtener el coste de la valla calculemos el perímetro de la zona,

$$P=2x+2y=2x+2\frac{400}{x}=2x+\frac{800}{x} \quad\rightarrow\quad f(x)=100\left(2x+\frac{800}{x}\right)=200x+\frac{80000}{x}$$

Como x representa la longitud de un lado y la función anterior no se puede calcular para x = 0, obtenemos:

$$Dom\ f(x)=(0,+\infty)$$

b) Estudiemos la monotonía de f(x)

$$f'(x)=200-\frac{80000}{x^2}$$

$$200-\frac{80000}{x^2}=0 \quad\rightarrow\quad 200x^2-80000=0 \quad\rightarrow\quad 200x^2=80000 \quad\rightarrow\quad x^2-400 \quad\rightarrow\quad x=\pm\sqrt{400}=\pm 20$$

$$Como \quad Dom\ f(x)=(0,+\infty) \quad\rightarrow\quad x=20$$

Estudiamos el signo de f ´(x) a la izquierda y derecha de 20,

x	$f'(x)$
1	$200-\dfrac{80000}{1}=200-80000 \quad <0$
40	$200-\dfrac{80000}{1600}=200-50 \quad >0$

Por lo tanto,
en (0, 20) f(x) es decreciente
en (20, +∞) f(x) es creciente

Como en x = 20 f(x) pasa de decreciente a creciente, en x = 20 f(x) tiene un mínimo.

Para x = 20 $\rightarrow\quad y=\dfrac{400}{20}=20$

Solución: f(x) alcanza el valor mínimo para x = 20, es decir, para una zona vallada cuadrada (x = 20 e y = 20).