EJERCICIO A

PROBLEMA 4. En el espacio $\Re^3$, se consideran el punto P = (3,2,3) y la recta r intersección de los planos de ecuaciones: x + 3 y – 4 z = 0 y x + 2 y – 2 z = 1. Se pide determinar:
a) La distancia d del punto P a la recta r (*1,3 puntos*).
b) Los puntos M y N de la recta r que cumplan que su distancia al punto P es $\sqrt{5}\,d$ *(2,3 puntos).*

Solución:
a) El cálculo de la distancia de un punto a una recta lo realizamos mediante la fórmula:

$$d(P,r)=\frac{\left|\overrightarrow{PP_r}\times\overrightarrow{v_r}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|}$$

siendo P_r un punto de la recta r
$\overrightarrow{v_r}$ el vector director de r

Para obtener P_r y $\overrightarrow{v_r}$ pasamos la ecuación de r a paramétricas.

$$r:\begin{cases}x+3y-4z=0\\x+2y-2z=1\end{cases}\qquad\begin{vmatrix}1&3\\1&2\end{vmatrix}=2-3=-1\neq 0$$

Planteamos el sistema, $\begin{cases}x+3y=4z\\x+2y=1+2z\end{cases}$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}4z&3\\1+2z&2\end{vmatrix}}{-1}=\frac{8z-3-6z}{-1}=\frac{2z-3}{-1}=3-2z$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1&4z\\1&1+2z\end{vmatrix}}{-1}=\frac{1+2z-4z}{-1}=\frac{1-2z}{-1}=-1+2z$$

Luego $r:\begin{cases}x=3-2\lambda\\y=-1+2\lambda\\z=\lambda\end{cases}\quad \lambda\in\Re \quad\Rightarrow\quad \begin{matrix}P_r(3,-1,\,0)\\ \overrightarrow{v_r}(-2,2,1)\end{matrix}$

$$\overrightarrow{PP_r}=(3,-1,0)-(3,2,3)=(0,-3,-3)$$

$$\overrightarrow{PP_r}\times\overrightarrow{v_r}=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\0&-3&-3\\-2&2&1\end{vmatrix}=\vec i\begin{vmatrix}-3&-3\\2&1\end{vmatrix}-\vec j\begin{vmatrix}0&-3\\-2&1\end{vmatrix}+\vec k\begin{vmatrix}0&-3\\-2&2\end{vmatrix}=3\,\vec i+6\,\vec j-6\,\vec k=(3,6,-6)$$

$$\left|\overrightarrow{PP_r}\times\overrightarrow{v_r}\right|=\sqrt{3^2+6^2+(-6)^2}=\sqrt{9+36+36}=\sqrt{81}=9$$

$$\left|\overrightarrow{v_r}\right|=\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}=\sqrt{4+4+1}=\sqrt{9}=3$$

Finalmente $d(P,r)=\dfrac{9}{3}=3\,u.\,l.$

b) Un punto de la recta r será $(3-2\lambda,-1+2\lambda,\lambda)\quad \lambda\in\Re$ *Buscamos puntos de r que cumplan*

$$d(\,(3-2\lambda,-1+2\lambda,\lambda)\,,\,(3,2,3)\,)=3\sqrt{5}$$

$$\sqrt{(3-2\lambda-3)^2+(-1+2\lambda-2)^2+(\lambda-3)^2}=3\sqrt{5}$$

$$\sqrt{(-2\lambda)^2+(-3+2\lambda)^2+(\lambda-3)^2}=3\sqrt{5}$$

$$\sqrt{4\lambda^2+9-12\lambda+4\lambda^2+\lambda^2-6\lambda+9}=3\sqrt{5}$$

$$\sqrt{9\lambda^2 - 18\lambda + 18} = 3\sqrt{5}$$

$$9\lambda^2 - 18\lambda + 18 = 45 \quad \to \quad 9\lambda^2 - 18\lambda - 27 = 0 \quad \to \quad \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \quad \to \quad \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \left\langle \begin{array}{l} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -1 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{ll} para \quad \lambda_1 = 3 & \to \quad M(5,-3,-1) \\ \qquad\quad \lambda_2 = -1 & \to \quad N(-3,5,3) \end{array}$$

c) El área del triángulo de vértices P(3,2,3), M(5,-3,-1) y N(-3,5,-3) la obtenemos mediante la fórmula

$$A = \frac{1}{2}\left|\vec{PM} \times \vec{PN}\right|$$

$$\vec{PM}(2,-5,-4) \qquad y \qquad \vec{PN}(-6,3,0)$$

$$\vec{PM} \times \vec{PN} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -5 & -4 \\ -6 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = 12\,\vec{i} - 24\,\vec{j} - 24\,\vec{k} = (12,-24,-24)$$

$$\left|\vec{PM} \times \vec{PN}\right| = \sqrt{12^2 + (-24)^2 + (-24)^2} = \sqrt{12^2 + 4\,.\,12^2 + 4\,.\,12^2} = \sqrt{9\,.\,12^2} = 3\,.\,12 = 36$$

$$Finalmente \quad A = \frac{1}{2}36 = 18\ u.\,a.$$