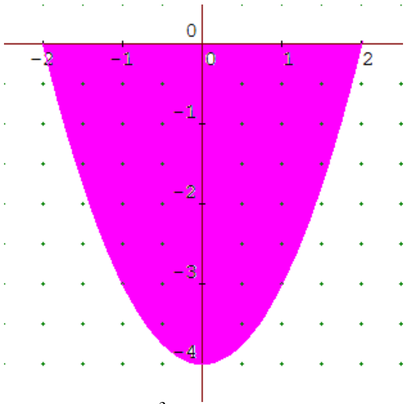
EJERCICIO B

PROBLEMA 2. a) Representar la superficie S limitada entre el OX y la curva y = x^2 - 4, cuando -2 ≤ x ≤ 2. Obtener, razonadamente, mediante una integral el área de la superficie S (*1,6 puntos*).
b) Hallar el volumen del cuerpo generado al dar un giro completo alrededor del eje OX la superficie S considerada en el apartado anterior, indicando como se ha obtenido el volumen (*1,7 puntos*).

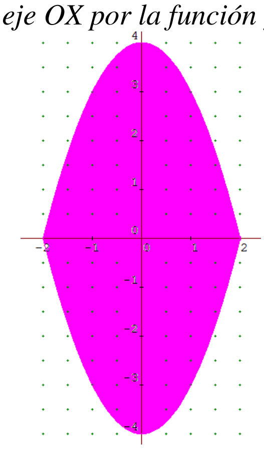
Solución:
a) $y = x^2 - 4$ es una parábola cuyo vértice está en el punto: x = 0 , $y = 0^2 - 4 = -4$. Vértice (0 , - 4)
Corte con el eje OX, $x^2 - 4 = 0$, $x^2 = 4$, x = 2 ó x = -2 ; (2 , 0) y (- 2 , 0)
La representación gráfica de la superficie S será



Como $f(x) = x^2 - 4$ es continua en [-2 , 2] y $F(x) = x^3/3 - 4x$ es una primitiva de f(x) podemos aplicar la regla de Barrow para calcular el área de la superficie S,

$$A_S = \left|\int_{-2}^{2}\left(x^2-4\right)dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_{-2}^{2}\right| = \left|\left(\frac{2^3}{3}-4\,.\,2\right)-\left(\frac{(-2)^3}{3}-4\,.\,(-2)\right)\right| = \left|\frac{8}{3}-8+\frac{8}{3}-8\right| = \left|\frac{16}{3}-16\right| = \left|\frac{-32}{3}\right| = \frac{-32}{3}\ u.\,a.$$

b) Al girar alrededor del eje OX la superficie S engendra un volumen que coincide con el engendrado al girar alrededor del eje OX por la función $y = x^2 - 4$, x Є [-2 , 2]. Gráficamente,



El cálculo del volumen es:

$$V = \pi\int_{-2}^{2}\left(x^2-4\right)^2dx = \pi\int_{-2}^{2}\left(x^4-8x^2+16\right)dx = \pi\left[\frac{x^5}{5}-\frac{8x^3}{3}+16x\right]_{-2}^{2} =$$

$$= \pi\left[\left(\frac{32}{5}-\frac{64}{3}+32\right)-\left(\frac{-32}{5}-\frac{-64}{3}-32\right)\right] = \pi\left(\frac{32}{5}-\frac{64}{3}+32+\frac{32}{5}-\frac{64}{3}+32\right) =$$

$$= \pi\left(\frac{64}{5}-\frac{128}{3}+64\right) = \pi\left(\frac{192-640+960}{15}\right) = \frac{512}{15}\pi\ u.v.$$