EJERCICIO B

PROBLEMA 4. Sean π y π´ los planos del espacio $\Re^3$, determinados del modo siguiente: el plano π pasa por los puntos (0,2,1), (3,-1,1) y (1,-1,5) y el plano π´ pasa por los puntos (3,0,2), (2,1,1) y (5,4,-2). Se pide calcular:
a) Una ecuación paramétrica de la recta *r* intersección de los planos π y π´ (*1,3 puntos*).
b) El ángulo α que forman los planos π y π´ (*0,7 puntos*).
c) La ecuación del plano que contiene a la recta *r* y forma un ángulo de 90 grados con el plano π (*1,3 puntos*).

Solución:
a) En primer lugar calculamos las ecuaciones generales de los dos planos.
Como de cada plano conocemos tres puntos, podemos formar dos vectores que, si no son paralelos, serán directores del plano.

Plano π,

$$\vec{u} = (3,-1,1)-(0,2,1)=(3,-3,0)$$
$$\vec{v} = (1,-1,5)-(0,2,1)=(1,-3,4)$$
$\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *no son paralelos*

La ecuación del plano se obtiene:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ -3 & -3 & y-2 \\ 0 & 4 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = 0$$
$$-12x-(y-2)12+(z-1)(-9+3)=0$$
$$-12x-12y+24-6z+6=0$$
$$-12x-12y-6z+30=0 \rightarrow 2x+2y+z-5=0$$

Plano π´,

$$\vec{u} = (2,1,1)-(3,0,2)=(-1,1,-1)$$
$$\vec{v} = (5,4,-2)-(3,0,2)=(2,4,-4)$$
$\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *no son paralelos*

La ecuación del plano se obtiene:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & x-3 \\ 1 & 4 & y \\ -1 & -4 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (x-3)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$
$$(x-3)(-4+4)-y(4+2)+(z-2)(-4-2)=0$$
$$-6y-6z+12=0$$
$$y+z-2=0$$

La ecuación de la recta r es: $\begin{cases} 2x+2y+z-5=0 \\ y+z-2=0 \end{cases}$ *La ecuación paramétrica de r la encontramos resolviendo este sistema.*

Como $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ *las incógnitas principales son x e y*

$$\begin{cases} 2x+2y=5-z \\ y=2-z \end{cases}$$
$$2x+2(2-z)=5-z \rightarrow 2x+4-2z=5-z \rightarrow 2x=-4+2z+5-z$$
$$2x=1+z \rightarrow x=\frac{1+z}{2}$$

La ecuación paramétrica de r: $\begin{cases} x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$

$b)$ *Siendo* $\vec{n}_\pi$ *un vector ortogonal al plano* π, *si* $\alpha = ang(\pi, \pi')$ $\rightarrow$ $\cos\alpha = \dfrac{\left|\vec{n}_\pi \, \vec{n}_{\pi'}\right|}{\left|\vec{n}_\pi\right| \left|\vec{n}_{\pi'}\right|}$

$\vec{n}_\pi = (2,2,1)$ *y* $\vec{n}_{\pi'} = (0,1,1)$ *luego* $\cos\alpha = \dfrac{|(2,2,1)\,(0,1,1)|}{|(2,2,1)|\,|(0,1,1)|} = \dfrac{|2+1|}{\sqrt{4+4+1}\,\sqrt{1+1}} = \dfrac{3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Luego $\alpha = 45^{\circ}$ *o* $\alpha = \dfrac{\pi}{4} rds$

$c)$ *Buscamos un plano* γ *tal que* $r \in \gamma$ *y* $(\widehat{\gamma, \pi}) = 90^{\circ}$

como γ *y* π *deben ser* $\perp \rightarrow \vec{n}_\pi$ *será vector director de* γ

como $r \in \gamma$ $\Rightarrow$ $\vec{v}_r$ *es director de* γ

P_r *es punto de* γ

De γ *conocemos* $\begin{cases} \vec{u}\ (2,2,1) \\ \vec{v}\left(\dfrac{1}{2},-1,1\right) \\ P\left(\dfrac{1}{2},2,0\right) \end{cases}$ *la ecuación de* γ $\begin{vmatrix} 2 & 1/2 & x-1/2 \\ 2 & -1 & y-2 \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} 2 & 1/2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 2 & 1/2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)3 - (y-2)\,\frac{3}{2} + z\,(-3) = 0 \quad \rightarrow \quad 3x - \frac{3}{2} - \frac{3y}{2} + 3 - 3z = 0 \quad \rightarrow \quad 3x - \frac{3y}{2} - 3z + \frac{3}{2} = 0$$

$$6x - 3y - 6z + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad 2x - y - 2z + 1 = 0$$

La ecuación del plano $\gamma : 2x - y - 2z + 1 = 0$