EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Obtener todos los valores reales x, y, z, t para los que se verifica A X = X A, siendo

X = $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ y A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (*3,3 puntos*).

Solución:

La ecuación a resolver A X = X A en forma matricial será, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Efectuando los productos matriciales $\begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 3x+4z & 3y+4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y & 2x+4y \\ z+3t & 2z+4t \end{pmatrix}$

Esta igualdad matricial da lugar al siguiente sistema $\begin{cases} x+2z = x+3y \\ y+2t = 2x+4y \\ 3x+4z = z+3t \\ 3y+4t = 2z+4t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y-2z = 0 \\ 2x+3y-2t = 0 \\ 3x+3z-3t = 0 \\ 3y-2z = 0 \end{cases}$

Como la ecuaciones 1ª y 4ª son la misma, el sistema queda $\begin{cases} 3y-2z = 0 \\ 2x+3y-2t = 0 \\ 3x+3z-3t = 0 \end{cases}$

Es un sistema homogéneo, será compatible. Estudiemos el rango de la matriz de coeficientes,

$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ *Como la matriz tiene coeficientes no nulos, al menos tiene rango 1. Buscamos un menor de orden 2 no nulo, por ejemplo,* $\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0-6 = -6 \neq 0$

Al menor no nulo anterior le añadimos una columna y una fila, obtenemos los siguientes menores,

$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -(-18)-18 = 18-18 = 0$ *y* $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -18-(-18) = 0$

Como estos menores de orden 3 son nulos y el menor de orden 2 no lo era, la matriz de coeficientes tiene rango 2, que es menor que el número de incógnitas, 4, luego el sistema será compatible indeterminado.

Para resolverlo escogemos las ecuaciones correspondientes al menor no nulo, es decir,

$\begin{cases} 3y = 2z \\ 2x+3y = 2t \end{cases}$ *de la 1ª ecuación despejamos la y* $y = \frac{2z}{3}$ *sustituyendo en la 2ª* $2x + 3\frac{2z}{3} = 2t$

luego $2x + 2z = 2t \rightarrow x + z = t \rightarrow x = -z + t$

La solución del sistema será $\begin{cases} x = -\lambda + \mu \\ y = \frac{2}{3}\lambda \\ z = \lambda \\ t = \mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \Re$

Podemos añadir que la matriz X buscada será una matriz de la forma

$X = \begin{pmatrix} -z+t & \frac{2}{3}z \\ z & t \end{pmatrix} \quad z,t \in \Re$