EJERCICIO A

PROBLEMA 3. Sea f(x) = x^2 + m x (donde m es un parámetro real) y f´(x) la función derivada de f(x). Se pide:
a) Hallar el valor del parámetro m para que f(x) tenga un mínimo relativo en x = -3/4 *(1,5 puntos).*
b) Para el valor de m calculado en a), determinar el área de la región comprendida entre la curva y = f(x) y la recta de ecuación y = f´(x) *(1,8 puntos).*

Solución:

Como f(x) es un polinomio de 2º grado en x, es una función continua y derivable en $\Re$.
a) Para que f(x) tenga un mínimo relativo en x = -3/4 debe ser f´(-3/4)=0 y f´´(-3/4)>0
f ´(x) = 2 x + m *f ´´(x) = 2*
2 (-3/4) + m = 0 → -3/2 + m = 0 → m = 3/2
Como f ´´(x) = 2 >0 (siempre), para m = 3/2 la función f(x) tiene un mínimo relativo en x = -3/4

b) Hay que calcular el área de la región comprendida entre las funciones

$$f(x) = x^2 + \frac{3}{2}x \quad y \quad f'(x) = 2x + \frac{3}{2}$$

Estas dos funciones son continuas y derivables en todo R (son funciones polinómicas) por lo tanto podremos aplicar la regla de Barrow para calcular el área comprendida entre ellas.
Buscamos los puntos de corte entre las dos funciones, para ello resolvemos la ecuación:

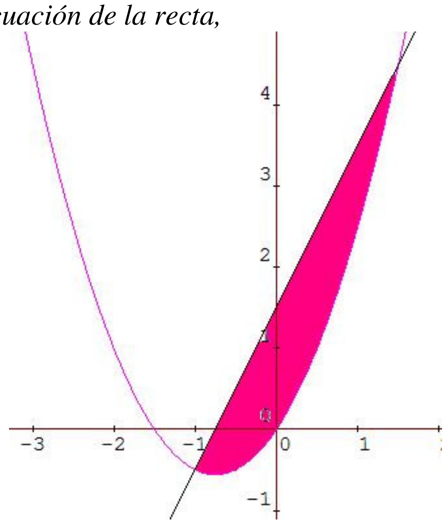
$$x^2 + \frac{3}{2}x = 2x + \frac{3}{2} \;\Rightarrow\; 2x^2 + 3x = 4x + 3 \;\Rightarrow\; 2x^2 - x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\,.\,2\,.\,(-3)}}{2\,.\,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4} \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{1+5}{4} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2} \\ x_2 = \dfrac{1-5}{4} = \dfrac{-4}{4} = -1 \end{array} \right.$$

Calculamos las ordenadas de los dos puntos de corte para realizar una representación aproximada de las dos funciones y del área que queremos calcular.
Calculamos las ordenadas a partir de la ecuación de la recta,

$$Para\ x = \frac{3}{2} \;\rightarrow\; y = 2\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

$$Para\ x = -1 \;\rightarrow\; y = 2(-1) + \frac{3}{2} = \frac{-1}{2}$$



$$A = \int_{-1}^{3/2} \left(2x + \frac{3}{2} - (x^2 + \frac{3}{2}x\right) dx = \int_{-1}^{3/2} \left(-x^2 + \frac{x}{2} + \frac{3}{2}\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}x\right]_{-1}^{3/2} =$$

$$= \left[-\frac{(3/2)^3}{3} + \frac{(3/2)^2}{4} + \frac{3}{2}\frac{3}{2}\right] - \left[-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{4} + \frac{3}{2}(-1)\right] = \frac{\frac{-27}{8}}{3} + \frac{\frac{9}{4}}{4} + \frac{9}{4} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2}\right) =$$

$$= \frac{-9}{8} + \frac{9}{16} + \frac{9}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{-54 + 27 + 108 - 16 - 12 + 72}{48} = \frac{207 - 82}{48} = \frac{125}{48}u^2$$