

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. Para las matrices reales: $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- Justificar que existe la matriz A^{-1} , inversa de A , y calcular el determinante de A^{-1} (1,2 puntos).
- Calcula la matriz $B = A(A + 4I)$ (0,7 puntos).
- Determinar los números reales x, y, z, t que cumplan $A^{-1} = xA + yI$, $A^2 = zA + tI$ (1,4 puntos)

Solución:

a) Como A es una matriz cuadrada de orden 3 tendrá inversa si su determinante es no nulo, calculemoslo:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 6 - 6 - (-10 + 6) = -12 - (-4) = -12 + 4 = -8 \neq 0$$

Como el determinante de A es no nulo existe A^{-1} .

Calculemos $|A^{-1}|$

Sabemos, por definición, que $A \cdot A^{-1} = I$

También sabemos que $|A \cdot B| = |A| |B|$ siendo A y B matrices cuadradas de orden n .

Como A y A^{-1} son matrices cuadradas de orden 3,

$|I| = |A \cdot A^{-1}| = |A| |A^{-1}|$, como $|I| = 1$

$|A| |A^{-1}| = 1$, por lo tanto $|A^{-1}| = 1 / |A|$

En nuestro caso $|A^{-1}| = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$

b) Calculamos $A + 4I$

$$A + 4I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = A(A + 4I) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-3+2 & 1+1-2 & -2-6+8 \\ 9-15+6 & -3+5-6 & 6-30+24 \\ 3-3+0 & -1+1+0 & 2-6+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

A partir del resultado anterior podemos decir que $B = -4I$

c) Para no tener que calcular A^{-1} transformamos la primera condición multiplicándola por la derecha por A ,

$$A^{-1}A = xAA + yIA$$

$$I = xA^2 + yA$$

Calculemos la matriz A^2

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3+2 & 1+5-2 & -2-6+0 \\ -3-15+6 & -3+25-6 & 6-30+0 \\ -1-3+0 & -1+5+0 & 2-6+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ -12 & 16 & -24 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

La primera condición expresada matricialmente sería:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ -12 & 16 & -24 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

que da lugar al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = -y \\ 0 = 4x - y \\ 0 = -8x + 2y \\ 0 = -12x + 3y \\ 1 = 16x - 5y \\ 0 = -24x + 6y \\ 0 = -4x + y \\ 0 = 4x - y \\ 1 = -4x \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{En este sistema se verifica que:} \\ 3^{\text{a}} \text{ ecuación} = -2 \cdot 2^{\text{a}} \text{ ecuación,} \\ 4^{\text{a}} = -3 \cdot 2^{\text{a}}, \\ 6^{\text{a}} = -6 \cdot 2^{\text{a}}, \\ 7^{\text{a}} = -1 \cdot 2^{\text{a}}, \\ 8^{\text{a}} = 2^{\text{a}}, \\ \text{luego las ecuaciones } 3^{\text{a}}, 4^{\text{a}}, 6^{\text{a}}, 7^{\text{a}} \text{ y } 8^{\text{a}} \text{ son} \\ \text{proporcionales a la } 2^{\text{a}} \text{ ecuación; podemos} \\ \text{eliminarlas y el sistema queda reducido a} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 = -y \\ 0 = 4x - y \\ 1 = 16x - 5y \\ 1 = -4x \end{array} \right.$$

De la primera ecuación obtenemos $y = -1$

de la última ecuación $x = -1/4$. Veamos si estos valores de x e y cumplen las otras dos ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 0 = 4 \frac{-1}{4} - (-1) \\ 0 = -1 + 1 \\ 0 = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} 1 = 16 \frac{-1}{4} - 5(-1) \\ 1 = -4 + 5 \\ 1 = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Cumplen } 2^{\text{a}} \text{ ecuación} \\ \text{Cumplen } 3^{\text{a}} \text{ ecuación} \end{array}$$

Luego $x = -1/4$ e $y = -1$ son solución del sistema.

Estudiemos ahora la 2ª condición $A^2 = z A + t I$

La expresión matricialmente sería:

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ -12 & 16 & -24 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que da lugar al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = -z + t \\ 4 = -z \\ -8 = 2z \\ -12 = 3z \\ 16 = -5z + t \\ -24 = 6z \\ -4 = z \\ 4 = -z \\ -4 = t \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{En este sistema se verifica que las} \\ \text{ecuaciones } 2^{\text{a}}, 3^{\text{a}}, 4^{\text{a}}, 6^{\text{a}}, 7^{\text{a}} \text{ y } 8^{\text{a}} \text{ son} \\ \text{la misma } -4 = z. \\ \text{El sistema queda reducido a} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = -z + t \\ 16 = -5z + t \\ -4 = z \\ -4 = t \end{array} \right.$$

La tercera y cuarta ecuación indican $z = -4$ y $t = -4$. Veamos si estos valores de z y t cumplen las otras dos ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 0 = -(-4) + (-4) \\ 0 = 4 - 4 \\ 0 = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} 16 = -5(-4) + (-4) \\ 16 = 20 - 4 \\ 16 = 16 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Cumplen } 1^{\text{a}} \text{ ecuación} \\ \text{Cumplen } 3^{\text{a}} \text{ ecuación} \end{array}$$

Luego $z = -4$ y $t = -4$ son solución del sistema.

Por tanto los valores de x, y, z, t buscados son $x = -\frac{1}{4}, y = -1, z = -4, t = -4$