EJERCICIO B

PROBLEMA 2. Consideramos los puntos: A = (1,0,0), B = (0,1,0), C = (0,0,1) y D = (2,1,2). Se pide

a) Hallar el área del triángulo de vértices B, C y D (*1,1 puntos*).
b) Calcular el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D (*1,1 puntos*).
c) Hallar la distancia del punto A al plano que pasa por los puntos B, C y D (*1,1 puntos*).

Solución:

a) *Para calcular el área del triángulo de vértices B, C y D usamos la fórmula*

$$A=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}\right|$$

Calculamos los vectores indicados,

$$\overrightarrow{BC}=(0,0,1)-(0,1,0)=(0,-1,1) \qquad y \qquad \overrightarrow{BD}=(2,1,2)-(0,1,2)=(2,0,2)$$

$$\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}0 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-2\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}\right|=\sqrt{(-2)^2+2^2+2^2}=\sqrt{4+4+4}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

$$Luego \quad A=\frac{1}{2}2\sqrt{3}=\sqrt{3}\ \ u.a.$$

b) *El volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D se obtiene como sigue*

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1 & z_1\\ 1 & x_2 & y_2 & z_2\\ 1 & x_3 & y_3 & z_3\\ 1 & x_4 & y_4 & z_4\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 2\end{vmatrix}=(C_1-C_2)=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 1 & 2\end{vmatrix}=\frac{1}{6}(-1)\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{-1}{6}(-1-1-2)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

El volumen del tetraedro es $\frac{2}{3}$ *u.v.*

c) *Dado un punto A(x_0,y_0,z_0) y un plano π: a x + b y + c z + d = 0*

$$d(a,\pi)=\frac{|a\ x_0+b\ y_0+c\ z_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Cálculo del plano π:

El plano π pasa por los puntos B, C y D; obtenemos los vectores $\overrightarrow{BC}$ *y* $\overrightarrow{BD}$ *y calculamos su producto vectorial (ya obtenido en el apartado a)), el vector que obtenemos (-2,2,2) es perpendicular al plano π.*

Del plano π conocemos: un punto, por ejemplo, B (0,1,0) y
un vector normal al plano (-2,2,2)

La ecuación del plano π será:

$$-2(x-0)+2(y-1)+2(z-0)=0$$
$$-2x+2y-2+2z=0$$
$$-x+y+z-1=0$$

Finalmente,

$$d(a,\pi)=\frac{|-1+0+0-1|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}}=\frac{|-2|}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\ u.l.$$