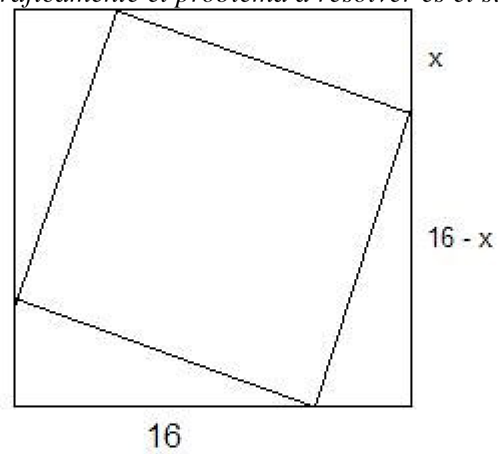
EJERCICIO B

PROBLEMA 4.1. Determinar razonadamente la longitud del lado del cuadrado de área mínima cuyos vértices están situados sobre los lados de otro cuadrado de lado 16 cm (3,3 puntos).

Solución:
Gráficamente el problema a resolver es el siguiente,



Para el cálculo de las áreas de los cuadrados podemos considerar que la del cuadrado inscrito es la del grande menos las áreas de cuatro triángulos rectángulos cuyos catetos miden x y 16 – x.
Llamando A_g al área del cuadrado de lado 16 y A_p a la del inscrito se cumple,
$A_g = 16^2 = 256$
$A_p = 256 - 4x(16 - x)/2 = 256 - 32x + 2x^2,\ x \in [0,16]$

Buscaremos el valor de x para el que A_p es mínima.

Consideramos la función $A_p(x) = 256 - 32x + 2x^2,\ x \in [0,16]$
$A_p(x)$ está definida como un polinomio de 2º grado y este polinomio es continuo y derivable en $\Re$, luego $A_p(x)$ será continua y derivable en el intervalo [0,16].
Para encontrar los valores de x en que $A_p(x)$ alcanza un mínimo relativo resolvemos la ecuación $A_p'(x) = 0$ y buscamos las soluciones que hagan $A_p''(x) > 0$
$A_p'(x) = -32 + 4x$
$-32 + 4x = 0 \quad\rightarrow\quad 4x = 32 \quad\rightarrow\quad x = 8 \ (8 \in [0,16])$
$A_p''(x) = 4$
$A_p''(8) = 4 > 0$
Para x = 8 $A_p(x)$ tiene un mínimo relativo, como $A_p(x)$ es un polinomio de 2º grado el mínimo relativo coincide con el mínimo absoluto, por lo tanto, para x = 8 el cuadrado inscrito es de área mínima.
Busquemos ahora el valor del lado de este cuadrado,
para x = 8 $A_p(8) = 256 - 32 \cdot 8 + 2\,8^2 = 256 - 256 + 128 = 128$ *que es el área del cuadrado, luego el lado de este cuadrado será l de forma que* $l^2 = 128$*, es decir,* $l = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$

Conclusión: el lado del cuadrado pedido mide $8\sqrt{2}$ *cm.*