EJERCICIO A

PROBLEMA 2. Un paralelepípedo rectangular (u ortoedro) tiene tres de sus aristas sobre las rectas:

$l:\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$, $m:\begin{cases} x-2y=0 \\ z=0 \end{cases}$ y $n:\begin{cases} 2x+y=0 \\ z=0 \end{cases}$, y uno de sus vértices es (12, 21, -11). Se pide:

a) Hallar los vértices restantes *(2,5 puntos).* b) Calcular su volumen *(0,8 puntos).*

Solución:

Obtengamos las ecuaciones paramétricas de las rectas l, m y n.

$$l:\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \quad \lambda\in\Re \\ z=\lambda \end{cases}$$

la recta l es el eje Z

$$m:\begin{cases} x-2y=0 \\ z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2y \\ z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2\mu \\ y=\mu \quad \mu\in\Re \\ z=0 \end{cases}$$

las rectas m y n están en el plano z = 0

$$n:\begin{cases} 2x+y=0 \\ z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-2x \\ z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\gamma \\ y=-2\gamma \quad \gamma\in\Re \\ z=0 \end{cases}$$

Obtengamos los puntos de intersección de estas tres rectas,

$$l\cap m \equiv \begin{cases} 0=2\mu \\ 0=\mu \\ \lambda=0 \end{cases} \rightarrow \lambda=\mu=0 \rightarrow l\cap m=(0,0,0)$$

$$l\cap n \equiv \begin{cases} 0=\gamma \\ 0=-2\gamma \\ \lambda=0 \end{cases} \rightarrow \lambda=\gamma=0 \rightarrow l\cap n=(0,0,0)$$

$$m\cap n \equiv \begin{cases} 2\mu=\gamma \\ \mu=-2\gamma \\ 0=0 \end{cases} \rightarrow \quad 2(-2\gamma)=\gamma \rightarrow -4\gamma=\gamma \rightarrow \gamma=0 \quad \rightarrow \mu=0 \rightarrow m\cap n=(0,0,0)$$

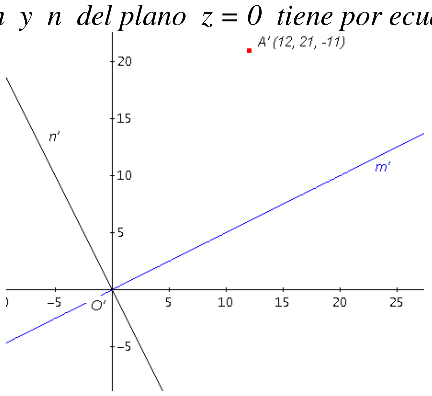
Es decir, el punto O(0,0,0) es un vértice del ortoedro. Como las rectas m y n están en el plano z = 0, una cara del ortoedro está en este plano.

Una arista del ortoedro está en el eje Z, el vértice A´(12,21,-11) no está en el plano z = 0, por lo tanto otra de sus caras, la opuesta a la que está en el plano z = 0, está en el plano z = -11.

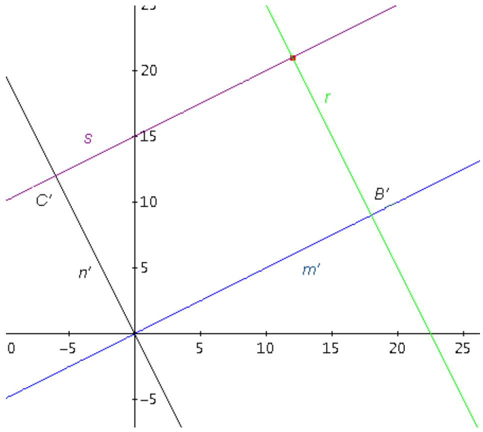
En el plano z = -11 los vértices del ortoedro serán: el conocido (12,21,-11), el que está en la arista l que será O'(0,0,-11) y los otros dos los obtenemos como sigue,

en el plano z = -11 las rectas paralelas a m y n del plano z = 0 tiene por ecuaciones:

$$m':\begin{cases} x=2\mu \\ y=\mu \\ z=-11 \end{cases} \qquad n':\begin{cases} x=\gamma \\ y=-2\gamma \\ z=-11 \end{cases}$$ *gráficamente*



para encontrar los otros dos vértices procedemos de la siguiente forma,



recta r que pasa por A'(12, 21, -11) y es paralela a n' $\quad r:\begin{cases} x=12+\lambda \\ y=21-2\lambda \\ z=-11 \end{cases}$

B´ punto de corte entre r y m´

$$\begin{cases} 12+\lambda=2\mu \\ 21-2\lambda=\mu \\ -11=-11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda-2\mu=-12 \\ -2\lambda-\mu=-21 \end{cases} \rightarrow \overset{2*1^{a}}{} \begin{cases} 2\lambda-4\mu=-24 \\ -2\lambda-\mu=-21 \end{cases}$$

$$sumando \rightarrow -5\mu=-45 \rightarrow \mu=9 \Rightarrow B´(18,9,-11)$$

recta s que pasa por A'(12, 21, -11) y es paralela a m' $\quad s:\begin{cases} x=12+2\lambda \\ y=21+\lambda \\ z=-11 \end{cases}$

C´ punto de corte entre s y n´

$$\begin{cases} 12+2\lambda=\gamma \\ 21+\lambda=-2\gamma \\ -11=-11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2\lambda-\gamma=-12 \\ \lambda+2\gamma=-21 \end{cases} \rightarrow \overset{2.1^{a}}{} \begin{cases} 4\lambda-2\gamma=-24 \\ \lambda+2\gamma=-21 \end{cases}$$

$$sumando \rightarrow 5\lambda=-45 \rightarrow \lambda=-9 \Rightarrow C´(-6,12,-11)$$

Los vértices correspondientes en el plano z = 0 serán:
O (0, 0, 0), A (12, 21, 0), B (18, 9, 0) y C(-6, 12, 0)

Los ocho vértices del ortoedro son:

O (0, 0, 0)

A (12, 21, 0)

B (18, 9, 0)

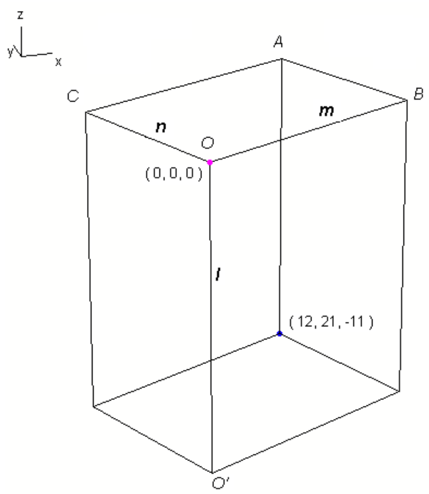
C (-6, 12, 0)

O' (0, 0, -11)

A' (12, 21, -11)

B' (18, 9, -11)

C' (-6, 12, -11)



b) El ortoedro está definido por los vectores

$$\overrightarrow{OO'}=(0,0,-11) \quad \overrightarrow{OB}=(8,9,0) \quad \overrightarrow{OC}=(-6,12,0)$$

$$Luego \quad V=\left|\begin{vmatrix} 0 & 0 & -11 \\ 8 & 9 & 0 \\ -6 & 12 & 0 \end{vmatrix}\right| = \left|-11\begin{vmatrix} 18 & 9 \\ -6 & 12 \end{vmatrix}\right| = \left|-11\,(18\,.\,12+6\,.\,9)\right| = \left|-11\,.\,270\right| = 2970$$

Es decir V = 2970 u^3