EJERCICIO A

PROBLEMA 3. a) El perímetro de un sector circular de radio R es 4 m. ¿Cuántos radianes α debe medir su ángulo central para que su área sea máxima? *(1,8 puntos)*. (Nota: Perímetro = 2 R + R α ; Área=½ α R^2)
b) El área de otro sector circular es 1 m^2. ¿Para qué radio es mínimo su perímetro? *(1,5 puntos)*.

Solución:

a) Como α es el ángulo central de un sector circular, tomara valores entre 0 y 2π.
Conocemos $P = 2R + R\alpha$
$A = \frac{1}{2}\alpha R^2$
$P = 4$ *y buscamos* α *para que el área sea máxima*

$4 = 2R + R\alpha \rightarrow 4 = R(2+\alpha) \rightarrow R = \dfrac{4}{2+\alpha}$

sustituyendo en la fórmula del área,

$$A = \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{4}{2+\alpha}\right)^2 = 8\frac{\alpha}{(2+\alpha)^2}$$

derivamos $A' = 8\dfrac{(2+\alpha)^2 - \alpha\, 2(2+\alpha)}{(2+\alpha)^4} =$ *simplificando por* $(2+\alpha) = 8\dfrac{(2+\alpha)-2\alpha}{(2+\alpha)^3} =$

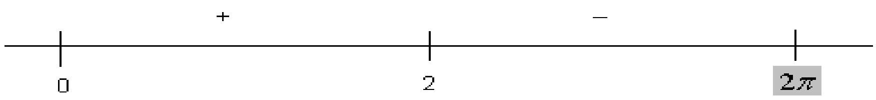
$$= 8\frac{2-\alpha}{(2+\alpha)^3} = \frac{16-8\alpha}{(2+\alpha)^3}$$

Para no calcular la segunda derivada de A, obtendremos el máximo de A mediante el estudio de la monotonía de A,

$16 - 8\alpha = 0 \rightarrow \alpha = 2$

$(2+\alpha)^3 = 0 \rightarrow 2+\alpha = 0 \rightarrow \alpha = -2$

Como α toma valores entre 0 y 2π, el estudio del signo de A’ lo hacemos en este intervalo,



Por lo tanto para α = 2 hay un máximo. El área será máxima cuando α = 2 rds.

b) Como R es el radio de un sector circular R debe ser un número positivo.
Conocemos $P = 2R + R\alpha$
$A = \frac{1}{2}\alpha R^2$
$A = 1$ *y buscamos R para que el perímetro sea mínimo*

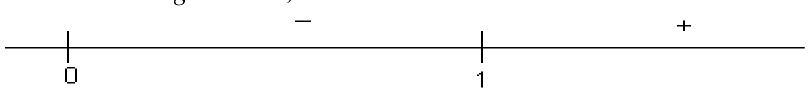
$\dfrac{1}{2}\alpha R^2 = 1 \rightarrow \alpha R^2 = 2 \rightarrow \alpha = \dfrac{2}{R^2}$

$$P = 2R + R\frac{2}{R^2} = 2R + \frac{2}{R}$$

$$P' = 2 - \frac{2}{R^2}$$

$2 - \dfrac{2}{R^2} = 0 \rightarrow 2R^2 - 2 = 0 \rightarrow 2R^2 = 2 \rightarrow R^2 = 1 \rightarrow R = \pm 1$

Como el radio no puede ser negativo, solución R = 1
Estudiamos el signo de P’,



Para R = 1 el perímetro es mínimo.