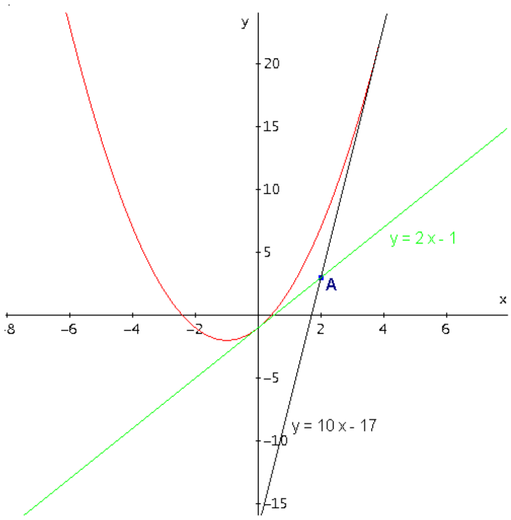
EJERCICIO B

PROBLEMA 3. En el plano se tiene la curva $y = x^2 + 2x - 1$. Encontrar razonadamente las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto (2, 3) y son tangentes a dicha curva (*3,3 puntos*).

Solución:
La solución gráfica del problema es:



Las rectas que pasan por el punto (2, 3) tienen por ecuación: $y = m(x-2)+3$, *siendo "m" la pendiente de la recta.*
Para que estas rectas sean tangentes a la curva $y = x^2 + 2x - 1$ *deben tocarla en un único punto.*
Estudiemos el corte entre la curva y la recta,

$$x^2 + 2x - 1 = m(x-2) + 3$$

$$x^2 + 2x - 1 = mx - 2m + 3$$

$$x^2 + 2x - mx - 1 + 2m - 3 = 0$$

$$x^2 + (2-m)x + (2m-4) = 0$$

Para que esta ecuación de 2º grado tenga una única solución, su discriminante debe ser cero, es decir:

$$(2-m)^2 - 4\,.\,1\,.\,(2m-4) = 0$$

$$4 - 4m + m^2 - 8m + 16 = 0$$

$$m^2 - 12m + 20 = 0$$

$$m = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4.1.20}}{2.1} = \frac{12 \pm \sqrt{144-80}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{12 \pm 8}{2} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{12+8}{2} = 10 \\ \frac{12-8}{2} = 2 \end{array} \right.$$

Hay dos rectas tangentes:

para $m = 10$, $y = 10(x-2) + 3$; $y = 10x - 17$

para $m = 2$, $y = 2(x-2) + 3$; $y = 2x - 1$