EJERCICIO B

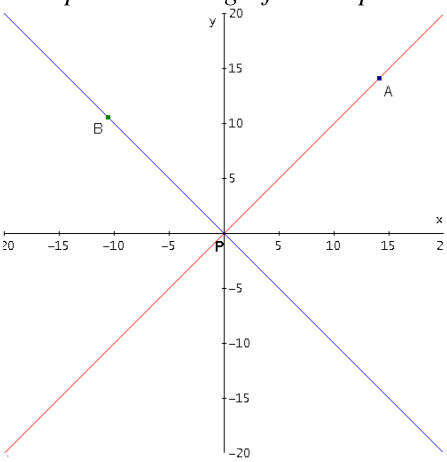
PROBLEMA 4.1. El trazado de dos canales navegables en un mapa discurre según las rectas *y=x* e *y=-x*. Dos lanchas motoras, A y B, salen al mismo tiempo de puntos situados sobre cada uno de los canales a distancias de 20 y 15 km, respectivamente, del punto P de confluencia de ambos. La lancha A se dirige a P con una velocidad de 30 km/h y la lancha B se dirige a ese mismo punto con velocidad 60 km/h. Se considera despreciable la anchura de los canales y la longitud de las lanchas y se pide calcular:

a) La distancia entre las lanchas en función del tiempo desde que inician su recorrido (*2,3 puntos*).

b) La distancia mínima a la que pueden estar las lanchas (*1 punto*).

Solución:

La representación gráfica del problema es:



El punto A puede estar en el primer o tercer cuadrante; el B en el segundo o cuarto. Como los canales son perpendiculares, independientemente del cuadrante en que estén la solución se obtiene a partir de los mismos cálculos.

Como las rectas $y = x$ *e* $y = -x$ *son perpendiculares los segmentos* PA *y* PB *son perpendiculares, por lo tanto* $d(A,B) = \sqrt{\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2}$.

Como la lancha A se dirige al punto P a 30 km/h PA(t) = 20 – 30 t

Como la lancha B se dirige al punto P a 60 km/h PB(t) = 15 – 60 t

a)

$$d(A,B)(t) = \sqrt{(20-30t)^2 + (15-60t)^2} = \sqrt{400 - 1200t + 900\,t^2 + 225 - 1800t + 3600\,t^2} =$$

$$= \sqrt{4500\,t^2 - 3000\,t + 625}$$

Por construcción el dominio de esta función debe ser $\Re^+$. *Vamos a comprobarlo,*

$$4500\,t^2 - 3000\,t + 625 \ge 0$$

Re*solvemos,*

$$4500\,t^2 - 3000\,t + 625 = 0$$

$$x = \frac{3000 \pm \sqrt{9000000 - 4.4500.625}}{9000} = \frac{3000 \pm \sqrt{9000000 - 11250000}}{9000} = \frac{3000 \pm \sqrt{-2250000}}{9000}$$

La ecuación no tiene soluciones reales, como el coeficiente de t^2 *es positivo el polinomio de 2º grado siempre es positivo.*

b) Busquemos el mínimo de la función anterior,

$$d'(A,B)(t) = \frac{9000t - 3000}{2\sqrt{4500t^2 - 3000t + 625}}$$

Estudiemos el signo de la derivada. Ya sabemos que el denominador es positivo, sólo necesitamos estudiar el signo del denominador,

$$9000t - 3000 = 0 \rightarrow 9000t = 3000 \rightarrow t = \frac{3000}{9000} = \frac{1}{3}$$

Para t < 1/3 d´ < 0; para t > 1/3 d´ >0. En t = 1/3 hay un mínimo relativo.

Como la función pasa de decreciente (d´<0) a creciente (d´>0), el mínimo relativo es el absoluto.

$$d(A,B)\left(\frac{1}{3}\right)=\sqrt{4500\left(\frac{1}{3}\right)^2-3000\frac{1}{3}+625}=\sqrt{500-1000+625}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}\approx 11'180$$

La distancia mínima a la que pueden estar las lanchas es de $5\sqrt{5}$ *Km. que aproximadamente son 11´180 Km.*