EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Dado el sistema de ecuaciones con un parámetro real λ e incógnitas x, y, z,

$$\begin{cases}(\lambda+2)x-y+z=0\\ 3x+(\lambda+6)y-3z=0\\ 5x+5y+(\lambda-2)z=0\end{cases}$$

se pide:

a) Calcular para qué valores de λ el sistema sólo admite la solución (*x, y, z*) = (0, 0, 0) **(1 punto).**

b) Para cada valor de λ que hace indeterminado el sistema, **obtener** todas sus soluciones **(1,8 puntos).**

c) Explicar la posición relativa de los tres planos definidos por cada una de las ecuaciones del sistema cuando λ = – 3 **(0,5 puntos).**

Solución:

Como es un sistema homogéneo estudiamos la matriz de coeficientes,

$$A=\begin{pmatrix}\lambda+2 & -1 & 1\\ 3 & \lambda+6 & -3\\ 5 & 5 & \lambda-2\end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda+2 & -1 & 1\\ 3 & \lambda+6 & -3\\ 5 & 5 & \lambda-2\end{vmatrix}\overset{C_2+C_1}{=}\begin{vmatrix}\lambda+2 & 0 & 1\\ 3 & \lambda+3 & -3\\ 5 & \lambda+3 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda+2)\begin{vmatrix}\lambda+3 & -3\\ \lambda+3 & \lambda-2\end{vmatrix}+1.\begin{vmatrix}3 & \lambda+3\\ 5 & \lambda+3\end{vmatrix}=$$

$$=(\lambda+2)(\lambda+3)\begin{vmatrix}1 & -3\\ 1 & \lambda-2\end{vmatrix}+(\lambda+3)\begin{vmatrix}3 & 1\\ 5 & 1\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda+3)(\lambda-2+3)+(\lambda+3)(3-5)=$$

$$(\lambda+2)(\lambda+3)(\lambda+1)-2(\lambda+3)=(\lambda+3)\left[(\lambda+2)(\lambda+1)-2\right]=(\lambda+3)(\lambda^2+3\lambda+2-2)=$$

$$=(\lambda+3)(\lambda^2+3\lambda)=(\lambda+3)(\lambda+3)\lambda=\lambda(\lambda+3)^2$$

$$|A|=0 \;\rightarrow\; \lambda(\lambda+3)^2=0 \;\rightarrow\; \begin{cases}\lambda=0\\ (\lambda+3)^2=0 \;\rightarrow\; (\lambda+3)=0 \;\rightarrow\; \lambda=-3\end{cases}$$

Para $\lambda\neq 0$ *y* $\lambda\neq -3$ $|A|\neq 0 \rightarrow$ *S.C.D., la solución es la trivial*

Para $\lambda=0$ *y* $\lambda=-3$ $|A|=0 \rightarrow$ *S.C.I.*

a) Los valores de λ *para los que el sistema sólo admite la solución (x,y,z)=(0,0,0), la solución trivial, son* $\lambda\neq 0$ *y* $\lambda\neq -3$.

b)

Para $\lambda=0$

El sistema es $\begin{cases}2x-y+z=0\\ 3x+6y-3z=0\\ 5x+5y-2z=0\end{cases}$

La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 6 & -3\\ 5 & 5 & -2\end{pmatrix}$ y sabemos que $|A|=0$

como $\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 6\end{vmatrix}=12+3=15\neq 0,\quad ran(A)=2$

resolvemos el sistema usando la 1ª y 2ª ecuación y como incógnitas principales x e y. Debemos resolver el siguiente sistema,

$$\begin{cases} 2x - y = -z \\ 3x + 6y = 3z \end{cases}$$

Por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -z & -1 \\ 3z & 6 \end{vmatrix}}{15} = \frac{-6z + 3z}{15} = \frac{-3z}{15} = \frac{-z}{5}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -z \\ 3 & 3z \end{vmatrix}}{15} = \frac{6z + 3z}{15} = \frac{9z}{15} = \frac{3z}{5}$$

Solución $\begin{cases} x = \dfrac{-\alpha}{5} \\ y = \dfrac{3\alpha}{5} \\ z = \alpha \end{cases} \quad \alpha \in \Re$

Para $\lambda = -3$

El sistema es $\begin{cases} -x - y + z = 0 \\ 3x + 3y - 3z = 0 \\ 5x + 5y - 5z = 0 \end{cases}$

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix}$ y sabemos que $|A| = 0$

Como en esta matriz se cumple que $F_2 = -3F_1$ y $F_3 = -5F_1$ el máximo rango de A será 1, podemos calcular el siguiente menor de orden 1,

$|-1| = -1 \neq 0$ *luego* $ran(A) = 1$

Para resolver el sistema utilizamos la primera ecuación y la incógnita x como principal, es decir, $-x - y + z = 0$, *por lo tanto,* $x = -y + z$

Solución $\begin{cases} x = -\alpha + \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \Re$

c) Para $\lambda = -3$, según hemos estudiado en el apartado anterior, la matriz de coeficientes tiene rango 1, esto quiere decir que los tres planos son el mismo.