EJERCICIO A

PROBLEMA 2. En el espacio se consideran:

- La recta ***r*** intersección de los planos de ecuaciones implícitas 2 x – 2 y – z = 9 y 4 x – y + z = 42.
- Y la recta ***s*** que pasa por los puntos (1,3,-4) y (3,-5,-2). Se pide:

a) Calcular las ecuaciones paramétricas de la recta ***r*** **(0,8 puntos)** y de la recta ***s*** **(0,3 puntos).**
b) Justificar que las rectas ***r*** y ***s*** se cruzan **(0,8 puntos)**.
c) Calcular un vector direccional de la recta ***t***, perpendicular común a las rectas ***r*** y ***s***, **(0,4 puntos)** y **calcular** el punto *P* de intersección de las rectas ***s*** y ***t*** **(1 punto)**.

Solución:
a) Ecuaciones paramétricas de la recta r.
Resolvemos el sistema

$$\begin{cases} 2x-2y-z=9 \\ 4x-y+z=42 \end{cases}$$

como $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -2+8=6\neq 0$

usaremos como incógnitas principales x *e* y

$$\begin{cases} 2x-2y=9+z \\ 4x-y=42-z \end{cases}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 9+z & -2 \\ 42-z & -1 \end{vmatrix}}{6}=\frac{-9-z+84-2z}{6}=\frac{75-3z}{6}=\frac{25-z}{2}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 9+z \\ 4 & 42-z \end{vmatrix}}{6}=\frac{84-2z-36-4z}{6}=\frac{48-6z}{6}=8-z$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta r son: $\begin{cases} x=\dfrac{25-\lambda}{2} \\ y=8-\lambda \qquad \lambda\in\Re \\ z=\lambda \end{cases}$

Ecuaciones paramétricas de s.

$\vec{v}_s=(3,-5,-2)-(1,3,-4)=(2,-8,2)\approx(1,-4,1)$

Las ecuaciones paramétricas de la recta s son: $\begin{cases} x=1+\mu \\ y=3-4\mu \qquad \mu\in\Re \\ z=-4+\mu \end{cases}$

b)

$\vec{v}_r=\left(\dfrac{-1}{2},-1,1\right)$ *Estos vectores no tiene sus coordenadas proporcionales* $\dfrac{-1}{-4}\neq\dfrac{1}{1}$

$\vec{v}_s=(1,-4,1)$ *por lo que las rectas* r *y* s *no son paralelas.*

Veamos la posición relativa de estas dos rectas mediante el cálculo del siguiente determinante,

$$\begin{vmatrix} \vec{v}_r & \vec{v}_s & P_r - P_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{-1}{2} & 1 & \frac{25}{2}-1 \\ -1 & -4 & 8-3 \\ 1 & 1 & 0-(-4) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{-1}{2} & 1 & \frac{23}{2} \\ -1 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_2 - C_1 \\ C_3 - 4C_1 \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{25}{2} \\ -1 & -3 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & \frac{25}{2} \\ -3 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 25 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(27+75) = 51 \neq 0$$

Por lo tanto las rectas r y s se cruzan.

c) La recta perpendicular común a r y s tiene como vector director,

$$\vec{v}_t = \vec{v}_r \wedge \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1/2 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -1/2 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = \vec{i}(-1+4) - \vec{j}\left(-\frac{1}{2}-1\right) + \vec{k}(2+1) =$$

$$= 3\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j} + 3\vec{k}$$

luego $\vec{v}_t = \left(3, \frac{3}{2}, 3\right) \approx \left(1, \frac{1}{2}, 1\right) \approx (2,1,2)$

Calculemos el punto P intersección de las rectas s y t.

Sean $P_r\left(\frac{25-\lambda}{2}, 8-\lambda, \lambda\right)$ *y* $P_s(1+\mu, 3-4\mu, -4+\mu)$ *puntos cualesquiera de las rectas r y s, respectivamente. Por ser t la perpendicular común a r y s buscamos el punto P imponiendo la condición de que los vectores* $\vec{P_r P_s}$ *y* $\vec{v}_t$ *deben ser paralelos.*

$$\vec{P_r P_s} = \left(1+\mu - \frac{25-\lambda}{2}, 3-4\mu-(8-\lambda), -4+\mu-\lambda\right)$$

$$\vec{v}_t = (2,1,2)$$

luego $$\frac{1+\mu-\frac{25-\lambda}{2}}{2} = \frac{3-4\mu-(8-\lambda)}{1} = \frac{-4+\mu-\lambda}{2}$$

que da lugar a siguiente sistema,

$$\begin{cases} \dfrac{1+\mu-\frac{25-\lambda}{2}}{2} = \dfrac{-4+\mu-\lambda}{2} \\ \dfrac{3-4\mu-(8-\lambda)}{1} = \dfrac{-4+\mu-\lambda}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1+\mu-\dfrac{25-\lambda}{2} = -4+\mu-\lambda \\ 6-8\mu-16+2\lambda = -4+\mu-\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2+2\mu-25+\lambda = -8+2\mu-2\lambda \\ -8\mu-\mu+2\lambda+\lambda = -4-6+16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\mu - 2\mu + \lambda + 2\lambda = -8 - 2 + 25 \\ -9\mu + 3\lambda = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3\lambda = 15 \\ -9\mu + 3\lambda = 6 \end{cases}$$

$$de \quad 1^{a} \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{15}{3} = 5$$

$$en \quad 2^{a} \quad \rightarrow \quad -9\mu + 3\,.\,5 = 6$$

$$-9\mu + 15 = 6$$

$$-9\mu = 6 - 15$$

$$-9\mu = -9$$

$$\mu = \frac{-9}{-9} = 1$$

El punto de la recta s buscado será: (1 + 1 , 3 – 4 . 1 , – 4 + 1) = (2 , – 1 , – 3)

Luego P (2 , – 1 , – 3)