EJERCICIO A

PROBLEMA 3. Dadas las funciones $f(x) = x^3 - 3x + 8$ y $g(x) = -3x$, se pide:
a) Calcular el máximo absoluto de la función $f(x)$ en el intervalo $[-3, 0]$ **(1 punto).**
b) Calcular el punto de corte de la curva $y = f(x)$ y la recta $y = g(x)$ **(1 punto).**
c) Obtener el área del recinto limitado por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = g(x)$, $x = -3$ y $x = 0$ **(1,3 puntos).**

Solución:
a) Máximo absoluto de f(x) en el intervalo $[-3, 0]$

Como f(x) es una función polinómica, es una función continua. El máximo absoluto de una función continua en un intervalo cerrado se alcanza e un extremo local de la función o en los extremos del intervalo.

Calculemos los extremos locales de la función,

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$3x^2 - 3 = 0 ; \quad 3x^2 = 3 ; \quad x^2 = 1; \quad x = \pm 1$

$f''(x) = 6x$

$f''(-1) = -6 < 0$ *luego en* $x = -1$ *hay un máximo local.*

$f''(1) = 6 > 0$ *luego en* $x = 1$ *hay un mínimo local.*

Como -1 *pertenece al intervalo* $[-3, 0]$ *f(x) alcanza un máximo local en este intervalo.*

$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 8 = -1 + 3 + 8 = 12$

$f(-3) = (-3)^3 - 3 \cdot (-3) + 8 = -27 + 9 + 8 = -10$

$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 + 8 = 8$

Luego f(x) alcanza su máximo absoluto en el intervalo $[-3, 0]$ *en el punto* $(-1, 12)$

b) Corte entre f(x) y g(x)

$x^3 - 3x + 8 = -3x$

$x^3 + 8 = 0$

$x^3 = -8$

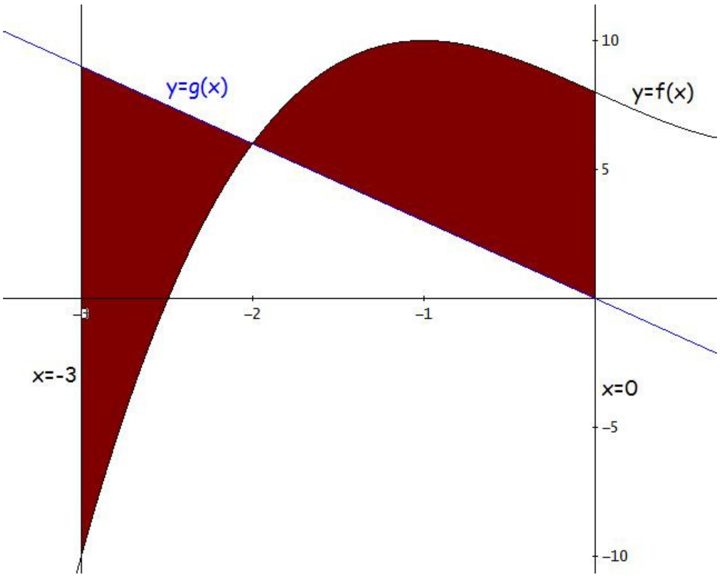
$x = \sqrt[3]{-8} = -2$

Para $x = -2$, $g(-2) = -3(-2) = 6$

El punto de corte entre f(x) y g(x) es $(-2, 6)$.

c) Área limitada por $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = -3$, $x = 0$

De los cálculos de los apartados anteriores podemos realizar una representación gráfica de las funciones que limitan el área a calcular,



Calculamos este área de la siguiente forma,

$$A=\int_{-3}^{-2}\left[(-3x)-(x^3-3x+8)\right]dx+\int_{-2}^{0}\left[(x^3-3x+8)-(-3x)\right]dx=\int_{-3}^{-2}\left[-3x-x^3+3x-8\right]dx+\int_{-2}^{0}\left[x^3-3x+8+3x\right]dx=$$

$$=\int_{-3}^{-2}\left[-x^3-8\right]dx+\int_{-2}^{0}\left[x^3+8\right]dx=\left[\frac{-x^4}{4}-8x\right]_{-3}^{-2}+\left[\frac{x^4}{4}+8x\right]_{-2}^{0}=$$

$$=\left(\frac{-(-2)^4}{4}-8(-2)\right)-\left(\frac{-(-3)^4}{4}-8(-3)\right)+\left(\frac{0^4}{4}+8\,.\,0\right)-\left(\frac{(-2)^4}{4}+8(-2)\right)=$$

$$=\left(\frac{-16}{4}+16\right)-\left(\frac{-81}{4}+24\right)+0-\left(\frac{16}{4}-16\right)=\frac{-16+64}{4}-\frac{-81+96}{4}-\frac{16-64}{4}=\frac{48}{4}-\frac{15}{4}-\frac{-48}{4}=$$

$$=\frac{48-15+48}{4}=\frac{81}{4}=20'25$$

El área pedida mide 20´25 u. a.