EJERCICIO B

PROBLEMA 1. A es una matriz 3× 3 tal que $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

Se pide:

a) Calcular el determinante de la matriz A^3 **(0,5 puntos)** y la matriz inversa de A^3 **(1 punto).**

b) Calcular la matriz fila $X = (x, y, z)$ que es solución de la ecuación matricial $XA^3 = BA^2$, donde B es la matriz fila $B = (1, 2, 3)$ **(1,3 puntos).**

c) Calcular la matriz inversa de A **(0,5 puntos).**

Solución:

a)

$$\left|A^3\right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 3-8+4 = -1 \neq 0 \quad luego \quad \exists \left(A^3\right)^{-1}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha_{i\,j}} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 \\ -4 & -7 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{i\,j}}$$

$$\xrightarrow{A_{i\,j}} \begin{pmatrix} 3 & -6 & -2 \\ 4 & -7 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{j\,i}} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -6 & -7 & -4 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$luego \quad \left(A^3\right)^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -6 & -7 & -4 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Buscamos la matriz fila X que cumpla $X A^3 = B A^2$

Por el apartado anterior sabemos que $\exists \left(A^3\right)^{-1}$, multiplicando la ecuación anterior por $\left(A^3\right)^{-1}$ por la izquierda:

$$X\ A^3 \left(A^3\right)^{-1} = B\ A^2 \left(A^3\right)^{-1}$$

$$X\ I = B\ A^2 \left(A^3\right)^{-1}$$

$$X = B\ A^2 \left(A^3\right)^{-1}$$

Por lo que el cálculo de la matriz X será,

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(1.2 + 2(-1) + 3(-1) \quad 1.1 + 2.0 + 3(-1) \quad 1.0 + 2.(-1) + 3.2 \right) \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(-3(-3) - 2.6 + 4.2 \quad -3(-4) - 2.7 + 4.2 \quad -3(-2) - 2.4 + 4.1 \right) = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución $X = (5 , 6 , 2)$

c) Calcular A^{-1}

Conocemos A^2 , A^3 *y* $\left(A^3\right)^{-1}$

Empezamos con $A^3 = A\,A^2$

multiplicando por $\left(A^3\right)^{-1}$ *por la derecha*

$$A^3\left(A^3\right)^{-1} = A\,A^2\left(A^3\right)^{-1}$$

$$I = A\,A^2\left(A^3\right)^{-1}$$

multiplicando por A^{-1} *por la izquierda*

$$A^{-1}I = A^{-1}A\,A^2\left(A^3\right)^{-1}$$

$$A^{-1} = I\,A^2\left(A^3\right)^{-1} \quad \rightarrow \quad A^{-1} = A^2\left(A^3\right)^{-1}$$

Luego

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(-3) + 1.6 + 0.2 & 2(-4) + 1.7 + 0.2 & 2(-2) + 1.4 + 0.1 \\ -1(-3) + 0.6 - 1.2 & -1(-4) + 0.7 - 1.2 & -1(-2) + 0.4 - 1.1 \\ -1(-3) - 1.6 + 2.2 & -1(-4) - 1.7 + 2.2 & -1(-2) - 1.4 + 2.1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$