EJERCICIO B

PROBLEMA 2. En el espacio se consideran:

- El plano **π** que pasa por los puntos (11, 1, 2), (5, 7, 5) y (7, –1, –2).
- Y la recta ***r*** intersección de los planos de ecuaciones implícitas $x + y + z = 15$ y $2x - 7y + 2z = 3$.

a) Calcular la ecuación paramétrica de ***r*** **(0,6 puntos)** y la ecuación implícita del plano **π (0,4 puntos).**
b) Calcular el punto *P* intersección de ***r*** y **π (0,8 puntos)** y el ángulo **α** que determinan ***r*** y **π (0,5 puntos).**
c) Calcular los puntos *M* y *N* de la recta ***r*** cuya distancia al plano **π** es igual a 3 u.l. **(1 punto).**

Solución:
a) Ecuación paramétrica de r

$$r:\begin{cases} x+y+z=15 \\ 2x-7y+2z=3 \end{cases} \qquad \textit{como} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = -7-2=-9 \neq 0$$

resolvemos el sistema de la recta r usando x e y como incógnitas principales.

$$\begin{cases} x+y=15-z \\ 2x-7y=3-2z \end{cases}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 15-z & 1 \\ 3-2z & -7 \end{vmatrix}}{-9}=\frac{-105+7z-3+2z}{-9}=\frac{-108+9z}{-9}=12-z$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 15-z \\ 2 & 3-2z \end{vmatrix}}{-9}=\frac{3-2z-30+2z}{-9}=\frac{-27}{-9}=3$$

La ecuación paramétrica de la recta r será: $r:\begin{cases} x=12-\lambda \\ y=3 \\ z=\lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \Re$

Ecuación implícita del plano π
Punto (11 , 1 , 2)

Vectores directores:
$$\vec{v}=(11,1,2)-(5,7,5)=(6,-6,-3)\approx(2,-2,-1)$$
$$\vec{w}=(11,1,2)-(7,-1,-2)=(4,2,4)\approx(2,1,2)$$

La ecuación implícita del plano π será,

$$\begin{vmatrix} x-11 & y-1 & z-2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0$$

$$(x-11)\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}-(y-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}+(z-2)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$(x-11)\,(-4+1)-(y-1)\,(4+2)+(z-2)\,(2+4)=0$$

$$(x-11)\,(-3)-(y-1)\,6+(z-2)\,6=0$$

$$-3x+33-6y+6+6z-12=0$$

$$-3x-6y+6z+27=0$$

simplificando por – 3
$x + 2y - 2z - 9 = 0$ *es la ecuación del plano π.*

b) P, punto de intersección de ***r*** *y* $\boldsymbol{\pi}$

Sustituimos las coordenadas de un punto cualquiera de la recta r en la ecuación del plano π

$$(12-\lambda,3,\lambda)\in r$$

$$12-\lambda+2\,.\,3-2\lambda-9=0$$

$$12-\lambda+6-2\lambda-9=0$$

$$9-3\lambda=0$$

$$-3\lambda=-9 \quad \rightarrow \quad \lambda=\frac{-9}{-3}=3$$

Por lo que el punto P será: (12 – 3 , 3 , 3) = (9 , 3 , 3)

Ángulo α que determinan r y π.

$$de \quad r \quad \vec{v}_r=(-1,0,1)$$

$$de \quad \pi \quad el\ vector\ ortogonal \quad \vec{u}=(1,2,-2)$$

$$Sea \quad \alpha=(\widehat{r,\pi})$$

$$sen\,\alpha=\frac{|\ (-1,0,1)\ (1,2,-2)\ |}{\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}\ \sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{|-1-2|}{\sqrt{2}\ \sqrt{9}}=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$Luego \quad \alpha=\frac{\pi}{4}\ rds$$

c)

$$¿M,N\in r? \quad / \quad d(M,\pi)=d(N,\pi)=3$$

$$\pi: x+2y-2z-9=0$$

$$Sea \quad P\in r \rightarrow \quad P=(12-\lambda,3,\lambda)$$

$$d(P,\pi)=\frac{|12-\lambda+2\,.\,3-2\lambda-9|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{|9-3\lambda|}{3}$$

$$\frac{|9-3\lambda|}{3}=3 \quad \rightarrow \quad |9-3\lambda|=9 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 9-3\lambda=9 \quad \rightarrow \quad -3\lambda=0 \quad \rightarrow \quad \lambda=0 \\ 9-3\lambda=-9 \quad \rightarrow \quad -3\lambda=-18 \quad \rightarrow \quad \lambda=6 \end{cases}$$

$$Para \quad \begin{array}{l} \lambda=0 \quad \rightarrow \quad M(\,12,3,0) \\ \lambda=6 \quad \rightarrow \quad N(\,6,3,6) \end{array}$$