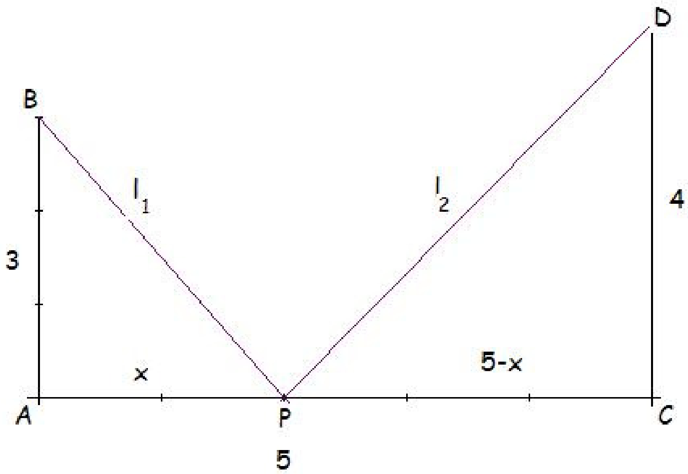
EJERCICIO B

PROBLEMA 4.
Dos postes de 3*m* y 4 *m* se hallan clavados verticalmente en el suelo. Sus bases distan 5 *m* y, en el segmento que las une, hay un punto *P* que dista *x* metros de la base del poste más bajo. El extremo superior de cada poste se une con *P* mediante un segmento rectilíneo de cable. Se pide:
a) Obtener la expresión *f(x)* de la longitud total de cable utilizado en ambos segmentos **(1,8 puntos).**
b) Demostrar que esa longitud total de cable es mínima cuando son iguales los valores absolutos de las pendientes de los dos segmentos considerados (**1 punto**). **Calcular** esa longitud mínima **(0,5 puntos).**

Solución:
Gráficamente el problema es,



a) f(x) = longitud el cable.

En el triángulo rectángulo PAB, $l_1 = \sqrt{3^2 + x^2} = \sqrt{9 + x^2}$

En el triángulo rectángulo PCD, $l_2 = \sqrt{4^2 + (5-x)^2} = \sqrt{16 + (5-x)^2}$

La longitud del cable será: $f(x) = \sqrt{9 + x^2} + \sqrt{16 + (5-x)^2}$

b) Llamamos m_1 a la pendiente del cable l_1 y m_2 a la pendiente del cable l_2

$$|m_1| = \left|\frac{3}{-x}\right| = \frac{3}{x} \quad \text{ya que } x > 0$$

$$|m_2| = \left|\frac{4}{5-x}\right| = \frac{4}{5-x} \quad \text{ya que } 5 - x > 0$$

Veamos cuando son iguales estos valores absolutos de las pendientes,

$$\frac{3}{x} = \frac{4}{5-x}$$

$$15 - 3x = 4x$$

$$15 = 4x + 3x$$

$$15 = 7x$$

$$x = \frac{15}{7}$$

Calculemos el mínimo de f(x)

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{9+x^2}} + \frac{-2(5-x)}{2\sqrt{16+(5-x)^2}} = \frac{x}{\sqrt{9+x^2}} - \frac{(5-x)}{\sqrt{16+(5-x)^2}}$$

$$f'(x)=0 \quad \rightarrow \quad \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}-\frac{(5-x)}{\sqrt{16+(5-x)^2}}=0$$

$$(*) \quad \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}=\frac{(5-x)}{\sqrt{16+(5-x)^2}}$$

elevando al cuadrado,

$$\frac{x^2}{9+x^2}=\frac{(5-x)^2}{16+(5-x)^2}$$

$$x^2\left[16+(5-x)^2\right]=\left(9+x^2\right)(5-x)^2$$

$$16x^2+x^2(5-x)^2=9(5-x)^2+x^2(5-x)^2$$

$$16x^2=9(5-x)^2$$

$$16x^2=9\left(25-10x+x^2\right)$$

$$16x^2=225-90x+9x^2$$

$$7x^2+90x-225=0$$

$$x=\frac{-90\pm\sqrt{90^2-4\,.\,7\,.\,(-225)}}{2\,.\,7}=\frac{-90\pm\sqrt{14400}}{14}=\frac{-90\pm120}{14}=\left\langle\begin{array}{l}\dfrac{-90+120}{14}=\dfrac{30}{14}=\dfrac{15}{7}\\[2ex] \dfrac{-90-120}{14}=\dfrac{-210}{14}=-15\end{array}\right.$$

debemos comprobar si son soluciones de la ecuación inicial (*)

$$x=-15$$

$$\frac{-15}{\sqrt{9+(-15)^2}}=\frac{5-(-15)}{\sqrt{16+(5-(-15))^2}}$$

$$\frac{-15}{\sqrt{234}}=\frac{20}{\sqrt{16+20^2}}$$

$$\frac{-15}{\sqrt{234}}=\frac{20}{\sqrt{416}}$$

evidentemente un número negativo no puede ser igual a uno positivo, luego x = – 15 no es solución

$$x=\frac{15}{7}$$

$$\frac{\frac{15}{7}}{\sqrt{9+\left(\frac{15}{7}\right)^2}}=\frac{5-\frac{15}{7}}{\sqrt{16+\left(5-\frac{15}{7}\right)^2}}$$

$$\frac{\frac{15}{7}}{\sqrt{9+\frac{225}{49}}}=\frac{\frac{35-15}{7}}{\sqrt{16+\left(\frac{35-15}{7}\right)^2}}$$

$$\frac{\frac{15}{7}}{\sqrt{9+\frac{225}{49}}}=\frac{\frac{20}{7}}{\sqrt{16+\left(\frac{20}{7}\right)^2}}$$

$$\frac{\frac{15}{7}}{\sqrt{9+\frac{225}{49}}}=\frac{\frac{20}{7}}{\sqrt{16+\frac{400}{49}}}$$

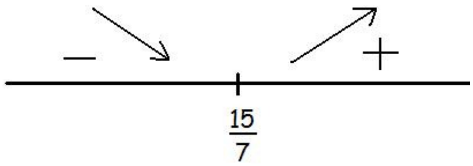
$$\frac{\frac{15}{7}}{\sqrt{\frac{666}{49}}}=\frac{\frac{20}{7}}{\sqrt{\frac{1184}{49}}} \rightarrow \frac{\frac{15}{7}}{\frac{\sqrt{666}}{7}}=\frac{\frac{20}{7}}{\frac{\sqrt{1184}}{7}} \rightarrow \frac{15}{\sqrt{666}}=\frac{20}{\sqrt{1184}} \rightarrow \frac{15}{3\sqrt{74}}=\frac{20}{4\sqrt{74}} \rightarrow \frac{5}{\sqrt{74}}=\frac{5}{\sqrt{74}}$$

luego $x=\frac{15}{7}$ *es solución*

Para determinar si $x=\frac{15}{7}$ *es mínimo o máximo relativo, estudiamos el signo de f´(x) alrededor de él*

$$f´(x)=\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}-\frac{(5-x)}{\sqrt{16+(5-x)^2}}$$

x	$f´(x)$
0	$\frac{0}{\sqrt{9+0^2}}-\frac{(5-0)}{\sqrt{16+(5-0)^2}}=-\frac{5}{\sqrt{16+25}}<0$
5	$\frac{5}{\sqrt{9+5^2}}-\frac{(5-5)}{\sqrt{16+(5-5)^2}}=\frac{5}{\sqrt{9+25}}>0$



Por lo tanto en $x=\frac{15}{7}$ *hay un mínimo relativo.*

Hemos demostrado que longitud total de cable es mínima cuando son iguales los valores absolutos de las pendientes de los dos segmentos considerados