Problema 1.1. Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 6x+3y+2z=5 \\ 3x+4y+6z=3 \\ x+3y+2z=\alpha \end{cases}$, se pide:

a) Justificar que para cualquier valor del parámetro real α, el sistema tiene solución única. *(1 punto).*
b) Hallar la solución del sistema en función del parámetro α. (*1.3 puntos*).
c) Determinar el valor de α para el que la solución (*x*, *y*, *z*) del sistema satisface *x* + *y* + *z* = *1*. (*1 punto*).

Solución:
a) La matriz ampliada del sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & \alpha \end{array}\right)$$

Estudiemos los rangos de la matriz de coeficientes, A, y de la ampliada A´.
A es una matriz 3x3, luego su máximo rango será 3. Calculemos el menor de orden 3 de A,

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 48+18+18-8-108-18=-50 \neq 0 \qquad \text{luego ran (A) = 3.}$$

Como A´ es 3x4, máximo rango de A´es 3. Como el rango de A ya es 3 el de A´ también será 3. Por lo tanto: ran(A) = ran(A´) = 3 = nº de incógnitas, el sistema es compatible determinado.
Y como en todo el proceso de cálculo no ha intervenido el parámetro α podemos afirmar que el sistema tiene solución única (es SCD) para cualquier valor de α.

b) Resolvamos el sistema por Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ \alpha & 3 & 2 \end{vmatrix}}{-50} = \frac{40+18+18\alpha-8\alpha-18-90}{-50} = \frac{-50+10\alpha}{-50} = \frac{5-\alpha}{5}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & \alpha & 2 \end{vmatrix}}{-50} = \frac{36+6\alpha+30-6-36\alpha-30}{-50} = \frac{30-30\alpha}{-50} = \frac{-3+3\alpha}{5}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & \alpha \end{vmatrix}}{-50} = \frac{24\alpha+45+9-20-54-9\alpha}{-50} = \frac{-20+15\alpha}{-50} = \frac{4-3\alpha}{10}$$

c) La solución del sistema que hemos obtenido en el apartado anterior debe satisfacer x + y + z = 1. Es decir,

$$\frac{5-\alpha}{5} + \frac{-3+3\alpha}{5} + \frac{4-3\alpha}{10} = 1$$

$$\frac{10-2\alpha}{10} + \frac{-6+6\alpha}{10} + \frac{4-3\alpha}{10} = 1$$

$$10-2\alpha-6+6\alpha+4-3\alpha = 10$$

$$8+\alpha = 10$$

$\alpha = 2$ **Por lo que, el valor buscado de α es 2.**