Problema 1.2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, se pide:

a) Obtener razonadamente todos los valores de α para los que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es la única solución de la ecuación matricial A X = α X. *(1,5 puntos).*

b) Resolver la ecuación matricial *A X = 2 X . (1,8 puntos).*

Solución:

a)

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 6x + 4y = \alpha x \\ -x + y = \alpha y \end{cases} \to \begin{cases} (6-\alpha)x + 4y = 0 \\ -x + (1-\alpha)y = 0 \end{cases}$$

para que la única solución del sistema sea la trivial, x = y = 0, deber ser $|A| \neq 0$, *siendo A la matriz de coeficientes del sistema anterior.*

Resolvamos

$$\begin{vmatrix} 6-\alpha & 4 \\ -1 & 1-\alpha \end{vmatrix} = 0 \to (6-\alpha)(1-\alpha) + 4 = 0 \to 6 - 7\alpha + \alpha^2 + 4 = 0 \to \alpha^2 - 7\alpha + 10 = 0$$

$$\alpha = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4.1.10}}{2.1} = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{7+3}{2} = \frac{10}{2} = 5 \\ \frac{7-3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

Luego $\alpha^2 - 7\alpha + 10 \neq 0$ *para* $\alpha \neq 2$ *y* $\alpha \neq 5$

Los valores de α *para los que* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *es la única solución de la ecuación matricial A X =* α *X son* $\alpha \in \Re - \{2,5\}$

b) La ecuación A X = 2 X corresponde al sistema planteado en el anterior apartado para $\alpha = 2$.

$$\begin{cases} (6-2)x + 4y = 0 \\ -x + (1-2)y = 0 \end{cases} \to \begin{cases} 4x + 4y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases}$$

Como se cumple que 1ª ecuación = – 4 . 2ª ecuación el sistema es indeterminado, lo resolvemos, por ejemplo, a partir de la 2ª ecuación.

– x – y = 0; y = – x

la solución será $X = \begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix} \quad a \in \Re$