Problema 2.1. Dado el plano $\pi: 2x + y + 3z - 1 = 0$ y el punto $Q = (2,1,3)$, se pide calcular :
a) La distancia del punto Q al plano π. (*1,1 puntos*).
b) El área del triángulo Δ cuyos vértices P_1, P_2 y P_3 son los puntos de intersección del plano π con los ejes coordenados. (*1,1 puntos*).
c) El volumen del tetraedro de vértices P_1, P_2, P_3 y Q. (*1,1 puntos*).

Solución:
a)

$$d(Q,\pi) = \frac{|2.2+1+3.3-1|}{\sqrt{2^2+1^2+3^2}} = \frac{|4+1+9-1|}{\sqrt{4+1+9}} = \frac{|13|}{\sqrt{14}} = \frac{13}{\sqrt{14}} u.l.$$

b) Calculemos los puntos de corte del plano π con los ejes de coordenadas,

$\pi \cap OX$

$$OX: \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$\pi: 2x+y+3z-1=0$

Debemos resolver el sistema:

$$\begin{cases} y=0 \\ z=0 \\ 2x+y+3z-1=0 \end{cases}$$

$$2x+0-3.0-1=0$$
$$2x-1=0$$
$$2x=1 \quad \to \quad x=\frac{1}{2}$$
$$P_1\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$$

$\pi \cap OY$

$$OY: \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$\pi: 2x+y+3z-1=0$

Debemos resolver el sistema:

$$\begin{cases} x=0 \\ z=0 \\ 2x+y+3z-1=0 \end{cases}$$

$$2.0+y-3.0-1=0$$
$$y-1=0$$
$$y=1$$
$$P_2(0,1,0)$$

$\pi \cap OZ$

$$OZ: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$\pi: 2x+y+3z-1=0$

Debemos resolver el sistema:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ 2x+y+3z-1=0 \end{cases}$$

$$2.0+0-3z-1=0$$
$$3z-1=0$$
$$3z=1 \quad \to \quad z=\frac{1}{3}$$
$$P_3\left(0, 0, \frac{1}{3}\right)$$

Llamando A al área triángulo Δ cuyos vértices son P_1, P_2 y P_3

$$A=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}\right|$$

$$\overrightarrow{P_1P_2}\left(\frac{-1}{2},1,0\right)$$

$$\overrightarrow{P_1P_2}\left(\frac{-1}{2},1,\frac{1}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{-1}{2} & 1 & 0\\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{3}\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{3}\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}\frac{-1}{2} & 0\\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{3}\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}\frac{-1}{2} & 1\\ \frac{-1}{2} & 0\end{vmatrix}=\vec{i}\,\frac{1}{3}-\vec{j}\,\frac{1}{6}+\vec{k}\,\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{3},\frac{-1}{6},\frac{1}{2}\right)$$

$$y\quad\left|\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{-1}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{4+1+9}{36}}=\sqrt{\frac{14}{36}}=\frac{\sqrt{14}}{6}$$

Finalmente,

$$A=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{14}}{6}=\frac{\sqrt{14}}{12}u.a.$$

c)

$$V(P_1,P_2,P_3,Q)=\left|\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\\ 1 & 2 & 1 & 3\end{vmatrix}\right|=\qquad \textit{(desarrollando el determinante por la } 3^a \textit{ columna)}$$

$$=\frac{1}{6}\left|-1\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\ 1 & 0 & \frac{1}{3}\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}\left|-1\left(\frac{-1}{6}\right)-\left(\frac{1}{6}-\frac{2}{3}-\frac{3}{2}\right)\right|=\frac{1}{6}\left|\frac{1}{6}-\frac{1}{6}+\frac{2}{3}+\frac{3}{2}\right|=\frac{1}{6}\left|\frac{4+9}{6}\right|=\frac{13}{36}u.v.$$