Problema 2.2. Dados los planos π_1 y π_2 de ecuaciones

$\pi_1 : x+2y+z+3=0$; $\pi_2 : 2x+y-z-6=0$, se pide:

a) Calcular el ángulo α que forman los planos π_1 y π_2. (*1,1 puntos*).

b) Calcular la ecuación paramétrica de la recta **r**, intersección de los planos π_1 y π_2. (*1,1 puntos*).

c) Comprobar que el plano π de ecuación $x + y - 1 = 0$ es el plano bisector de π_1 y π_2, es decir, π forma un ángulo $\alpha/2$ con cada uno de de los planos π_1 y π_2, donde α es el ángulo obtenido en el apartado a). (*1,1 puntos*).

Solución:

a)

$$\alpha = ang(\pi_1, \pi_2)$$

$$\cos\alpha = \frac{|\,(1,2,1)\,(2,1,-1)\,|}{|\,(1,2,1)\,|\,|\,(2,1,-1)\,|} = \frac{|2+2-1|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{|3|}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{3} rds$$

b)

$$r: \begin{cases} x+2y+z=-3 \\ 2x+y-z=6 \end{cases}$$

como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1-4=-3 \neq 0$

resolvemos el sistema usando x e y como incógnitas principales.

$$\begin{cases} x+2y=-3-z \\ 2x+y=6+z \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3-z & 2 \\ 6+z & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-3-z-12-2z}{-3} = \frac{-15-3z}{-3} = 5+z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3-z \\ 2 & 6+z \end{vmatrix}}{-3} = \frac{6+z+6+2z}{-3} = \frac{12+3z}{-3} = -4-z$$

Solución $r: \begin{cases} x=5+\lambda \\ y=-4-\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \qquad \lambda \notin \Re$

c)

Sea β *el ángulo que forman los planos* π y π_1.

$$\cos\beta = \frac{|\,(1,2,1)\,(1,1,0)\,|}{|\,(1,2,1)\,|\,|\,(1,1,0)\,|} = \frac{|1+2|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{|3|}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\pi}{6} rds$$

Sea δ *el ángulo que forman los planos* π y π_2.

$$\cos\delta = \frac{|\,(2,1,-1)\,(1,1,0)\,|}{|\,(2,1,-1)\,|\,|\,(1,1,0)\,|} = \frac{|2+1|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{|3|}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{\pi}{6} rds$$

Luego $\beta = \delta = \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\frac{\pi}{3}}{2} = \dfrac{\alpha}{2}$ *como queríamos comprobar.*