Problema 3.1. Se consideran las funciones reales $f(x) = 4x^2 + 2x + 10$ y $g(x) = x^3 + x^2 + 5x + 5$. Se pide:

a) Determinar las ecuaciones de las asíntotas a la gráfica de la función $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *(1,6 puntos).*

b) Calcular la función $H(x) = \int \dfrac{f(x)}{g(x)}dx$ que cumple $H(0) = 0$. *(1,7 puntos).*

Solución:

a)

$$y = \frac{4x^2+2x+10}{x^3+x^2+5x+5}$$

Asíntotas verticales:

$x^3 + x^2 + 5x + 5 = 0$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 1 & 5 & 5 \\ -1 & & -1 & 0 & -5 \\ \hline & 1 & 0 & 5 & 0 \end{array}$$

$x^2+5=0 \quad \rightarrow \quad x^2=-5$ *sin raíces reales.*

Veamos si $x = -1$ *es a.v.*

$$\underset{x\to -1}{Lím}\frac{4x^2+2x+10}{x^3+x^2+5x+5} = \frac{4(-1)^2+2(-1)+10}{0} = \frac{4-2+10}{0} = \frac{12}{0} = \infty$$

Por lo tanto $x = -1$ *es asíntota vertical.*

Asíntota horizontal:

$$\underset{x\to +\infty}{Lím}\frac{4x^2+2x+10}{x^3+x^2+5x+5} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \underset{x\to +\infty}{Lím}\frac{4x^2}{x^3} = \underset{x\to +\infty}{Lím}\frac{4}{x} = 0$$

análogamente,

$$\underset{x\to -\infty}{Lím}\frac{4x^2+2x+10}{x^3+x^2+5x+5} = \left(\frac{+\infty}{-\infty}\right) = \underset{x\to -\infty}{Lím}\frac{4x^2}{x^3} = \underset{x\to -\infty}{Lím}\frac{4}{x} = 0$$

Por lo tanto $y = 0$ *es la asíntota horizontal.*

Asíntota oblicua:

$$m = \underset{x\to +\infty}{Lím}\frac{\dfrac{4x^2+2x+10}{x^3+x^2+5x+5}}{x} = \underset{x\to +\infty}{Lím}\frac{4x^2+2x+10}{x^4+x^3+5x^2+5x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \underset{x\to +\infty}{Lím}\frac{4x^2}{x^4} = \underset{x\to +\infty}{Lím}\frac{4}{x^2} = 0$$

Por lo tanto no hay asíntota oblicua.

b)

$$H(x) = \int \frac{4x^2+2x+10}{x^3+x^2+5x+5}dx$$

$$\frac{4x^2+2x+10}{x^3+x^2+5x+5} = \frac{4x^2+2x+10}{(x+1)\left(x^2+5\right)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+5} = \frac{A\left(x^2+5\right)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)\left(x^2+5\right)}$$

$$4x^2+2x+10 = A\left(x^2+5\right)+(Bx+C)(x+1)$$

$x=-1 \quad \rightarrow \quad 4-2+10 = A(1+5)+(-B+C)=0$

$\qquad 12=6A \quad \rightarrow \quad A=2$

$x=0 \quad \rightarrow \quad 10 = 5A+C$

$\qquad 10 = 5\,.\,2+C$

$\qquad 10 = 10+C \quad \rightarrow \quad C=0$

$x=1 \quad \rightarrow \quad 16 = 6A+(B+C)2$

$\qquad 16 = 6\,.\,2+(B+0)2$

$\qquad 16 = 12+2B \quad \rightarrow \quad 4=2B \quad \rightarrow \quad B=2$

$$H(x) = \int \frac{4x^2+2x+10}{x^3+x^2+5x+5}dx = \int \frac{2}{x+1}dx + \int \frac{2x}{x^2+5}dx = 2Ln|x+1| + Ln|x^2+5| + C =$$

$\qquad como \quad x^2+5>0 \quad \forall x \in \Re$

$\qquad = Ln(x+1)^2 + Ln(x^2+5) + C$

Debe ser $H(0) = 0$

$0 = Ln(0+1)^2 + Ln\,(0^2+5) + C$

$0 = Ln\,1 + Ln\,5 + C$

$0 = 0 + Ln\,5 + C$

$C = -\ Ln\,5$

Por lo que,

$$H(x) = Ln(x+1)^2 + Ln(x^2+5) - Ln\,5 = Ln\frac{(x+1)^2(x^2+5)}{5}$$