Problema 3.2. Sea la función con dominio los números reales no nulos $f(x)=\frac{4}{x}$.

a) Calcular la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$. *(1.8 puntos).*

b) Determinar los puntos M y N de la gráfica de $f(x)$ para los que las rectas tangentes a la gráfica en M y N se cortan en el punto (4 , – 8). *(1.5 puntos).*

Solución:

a) Recta tangente a f(x) en x = 2

$$x=2 \quad \rightarrow \quad f(2)=\frac{4}{2}=2 \quad \rightarrow \quad punto \quad (2,2)$$

$$f'(x)=\frac{-4}{x^2} \quad \rightarrow \quad m=f'(2)=\frac{-4}{2^2}=-1$$

la ecuación de la recta tangente pedida será: y – 2 = – 1 (x – 2)

y – 2 = – x + 2

y = – x + 4

Recta normal a f(x) en x = 2

punto (2,2)

pendiente m´, siendo m´= -1/m; luego m´ = – 1/(– 1) = 1

la ecuación de la recta normal pedida será: y – 2 = 1 (x – 2); ***y = x***

b) Buscamos dos rectas tangentes a f(x) que pasan por el punto (4 , – 8), de ellas conocemos:

punto: (4 , – 8)

pendiente: $m=f'(x)=\frac{-4}{x^2}$

La ecuación de las rectas buscadas será:

$$y+8=\frac{-4}{x^2}(x-4)$$

como las rectas pasan por puntos de la función f(x), pasan por un punto de coordenadas

$$\left(x,\frac{4}{x}\right)$$

luego $\frac{4}{x}+8=\frac{-4}{x^2}(x-4)$

$$\frac{4+8x}{x}=\frac{-4x+16}{x^2}$$

$$4x^2+8x^3=-4x^2+16x$$

$$8x^3+8x^2-16x=0$$

$$8x\left(x^2+x-2\right)=0\left\langle\begin{array}{l}8x=0 \quad \rightarrow \quad x=0\\ x^2+x-2=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}=\left\langle\begin{array}{l}x=1\\x=-2\end{array}\right.\end{array}\right.$$

la solución x = 0 no es válida ya que el dominio de f(x) son los números reales no nulos.

Por lo que M y N son puntos de la función f(x) con abcisas – 2 y 1, es decir,

$$x=-2 \quad \rightarrow \quad y=\frac{4}{-2}=-2$$

$$x=1 \quad \rightarrow \quad y=\frac{4}{1}=4$$

Los puntos pedidos serán M (– 2 , – 2) y N (1 , 4).