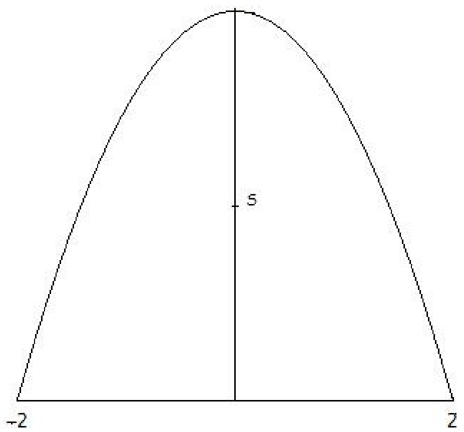
Problema 4.2. El borde de un estanque está formado por el arco de curva *$y = 4 - x^2$* de extremos (– 2 , 0) y (2,0) y el segmento rectilíneo que une estos dos puntos. Un surtidor está situado en el punto de coordenadas (0,2) . Se pide:
a) Determinar, razonadamente, el punto del segmento rectilíneo del borde del estanque que está más próximo del surtidor. *(0,8 puntos).*
b) Determinar, razonadamente, los puntos del arco de curva del borde del estanque que están más próximos del surtidor. *(1,6 puntos).*
c) ¿Cuáles son los puntos del borde del estanque más próximos al surtidor? *(0,9 puntos).*

Solución:

La representación gráfica del estanque es:



a)

El punto del segmento rectilíneo más cercano al surtidor, punto S(0,2), es el (0,0) ya que la distancia del surtidor a este punto es 2 y a cualquier otro punto del segmento rectilíneo sería:

$$d(S,(d,0)) = \sqrt{(d-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{d^2+4}\ ,\ d \in [-2,2]\ y\ d \neq 0$$

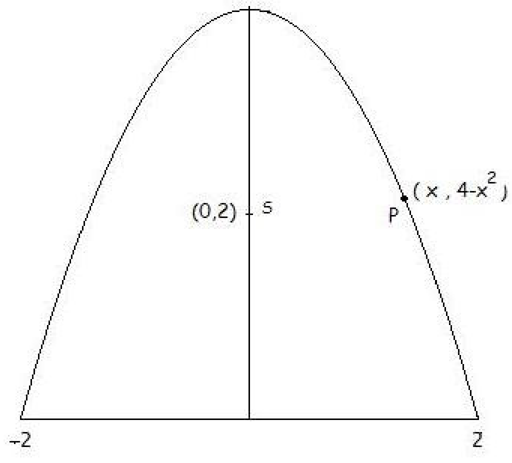
como $d^2 > 0$, entonces $4 + d^2 > 4$
como tanto $4 + d^2$ como 4 son positivos se cumple que

$$\sqrt{4+d^2} > \sqrt{4} \quad \rightarrow \quad \sqrt{4+d^2} > 2$$

es decir, d(S,(d,0)) > d(S, (0,0)).

b)

Las coordenadas de cualquier punto del arco de curva son (x , $4 - x^2$)



$$d(S,P) = \sqrt{(x-0)^2 + (4-x^2-2)^2} = \sqrt{x^2 + (2-x^2)^2}$$

d(S,P) será mínima cuando $d = x^2 + (2 - x^2)^2$ sea mínima, calculemos el mínimo de esta última función.
$d´ = 2x + 2(2 - x^2)(-2x) = 2x - 8x + 4x3 = 4x^3 - 6x$

$$4x^3 - 6x = 0;\quad 2x(2x^2 - 3) = 0 \quad \begin{cases} 2x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \\ 2x^2 - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = \dfrac{3}{2} \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}} \end{cases}$$

Para ver para cuáles de los anteriores valores la función d es mínima calculemos su segunda derivada,
$d´´ = 12x^2 - 6$
para $x = 0$, $d´´ = 12 . 0^2 - 6 = -6 < 0$, máximo

$para\ x=\sqrt{\frac{3}{2}}\quad d''=12\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2-6=12\frac{3}{2}-6=18-6=12>0\quad mínimo$

$para\ x=-\sqrt{\frac{3}{2}}\quad d''=12\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2-6=12\frac{3}{2}-6=18-6=12>0\quad mínimo$

Tenemos las abcisas de los puntos buscados, calculemos sus ordenadas,

$x=\sqrt{\frac{3}{2}}\quad y=4-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2=4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$

$x=-\sqrt{\frac{3}{2}}\quad y=4-\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2=4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$

Por lo tanto los puntos del arco de curva del borde el estanque que están más próximos al surtidor son:

$\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\ ,\ \frac{5}{2}\right)\quad y\quad \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\ ,\ \frac{5}{2}\right)$

c)

En los apartados anteriores hemos obtenido los puntos más cercanos al surtidor del borde rectilíneo y del curvo; estos puntos son

$(0,0)\ ,\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\ ,\ \frac{5}{2}\right)\quad y\quad \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\ ,\ \frac{5}{2}\right)$

El surtidor está en el punto (0,2), calculemos la distancia del surtidor a cada uno de los puntos anteriores.
Según obtuvimos en el apartado a), $d_1 = d(S, (0,0)) = 2$
Según obtuvimos en el apartado b), los puntos del arco de curva distan del surtidor

$d(S,P)=\sqrt{x^2+(2-x^2)^2}$

$$d_2=d\left(S,\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{5}{2}\right)\right)=\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2+\left(2-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}+\left(2-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{7}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}=1'3228757$$

$$d_3=d\left(S,\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{5}{2}\right)\right)=\sqrt{\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2+\left(2-\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}+\left(2-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{7}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}=1'3228757$$

Por lo que los puntos del borde del estanque más próximos al surtidor son: $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\ ,\ \frac{5}{2}\right)\quad y\quad \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\ ,\ \frac{5}{2}\right)$