Problema 1.2. Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+y+z=\alpha+3 \\ 2x-y+z=\alpha+1 \\ 3x+\alpha y+2z=4 \end{cases}$, se pide:

a) Probar que es compatible para todo valor de α. *(1,3 puntos).*
b) Obtener razonadamente el valor de α para el que el sistema es indeterminado. *(1 punto).*
c) Resolver el sistema cuando α = 0, escribiendo los cálculos necesarios para ello. *(1 punto).*

Solución:
a) Probar que es compatible para todo valor de α.

La matriz de coeficientes de este sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & \alpha & 2 \end{pmatrix}$ *y la ampliada* $A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \alpha+3 \\ 2 & -1 & 1 & \alpha+1 \\ 3 & \alpha & 2 & 4 \end{array}\right)$

Para conocer la compatibilidad del sistema estudiamos los rangos de estas dos matrices.
A es una matriz 3x3, por lo que su máximo rango será 3,
A´ es una matriz 3x4, por lo que su máximo rango será 3
Estudiamos el rango de A.
Calculamos el menor de orden 3 de A

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & \alpha & 2 \end{vmatrix} = -2+2\alpha+3+3-\alpha-4=\alpha$$

Para α ≠ 0, ran(A) = 3. Como el máximo rango de A´ es 3, ran(A´) = 3.
ran(A) = ran(A´) = 3 = nº de incógnitas, Sistema Compatible Determinado

Para α = 0, escribimos la matriz A´

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

Estudiemos el rango de la matriz de coeficientes, A. Sabemos que $|A| = 0$.

El menor de orden 2 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1-2=-3 \neq 0 \quad \rightarrow$ *ran(A) = 2*

Estudiemos el rango de la matriz ampliada, A´. Orlando el menor no nulo anterior con la 3ª fila y 4ª columna,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -4+3+9-8=0 \quad \rightarrow \quad ran(A')=2$$

Por lo que ran(A) = ran(A´) = 2 < nº de incógnitas, Sistema Compatible Indeterminado

Y finalmente queda probado que para cualquier valor de α el sistema es compatible.

b) Según lo estudiado en el apartado anterior, el sistema es compatible indeterminado para α = 0.

c) Resolver para α = 0.
Del apartado a) sabemos que para α = 0 ran(A) = ran(A´) = 2, el menor de orden 2 no nulo de la matriz A nos indica las ecuaciones e incógnitas principales que usaremos para resolver el sistema.
El sistema a resolver es:

$\begin{cases} x+y=3-z \\ 2x-y=1-z \end{cases}$ *Sabemos que* $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$

Resolviendo por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3-z & 1 \\ 1-z & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-3+z-1+z}{-3} = \frac{-4+2z}{-3} = \frac{4-2z}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3-z \\ 2 & 1-z \end{vmatrix}}{-3} = \frac{1+-z-6+2z}{-3} = \frac{-5+z}{-3} = \frac{5-z}{3}$$

Y la solución del sistema será:

$$\begin{cases} x = \dfrac{4-2\lambda}{3} \\ x = \dfrac{5-\lambda}{3} \qquad \lambda \in \Re \\ z = \lambda \end{cases}$$