Matemáticas II Septiembre 2008

Problema 2.1. Dados los planos **π_1**: $x + y + z = 3$ y **π_2**: $x + y - \alpha z = 0$, se pide calcular razonadamente:
a) El valor de α para que los planos **π_1** y **π_2** sean perpendiculares y, para este valor de α, obtener las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de estos dos planos. *(1,5 puntos).*
b) El valor de α para que los planos **π_1** y **π_2** sean paralelos y, para este valor de α, obtener la distancia entre los dos planos **π_1** y **π_2** . *(1,8 puntos).*

Solución:
a) Valor de α / $\pi_1 \perp \pi_2$

Sea $\vec{n}_{\pi}$ *un vector ortogonal al plano π, entonces* $\pi_1 \perp \pi_2$ *si* $\vec{n}_{\pi_1} \perp \vec{n}_{\pi_2}$

$\vec{n}_{\pi_1} = (1,1,1)$ *y* $\vec{n}_{\pi_2} = (1,1,-\alpha)$

Para que $\vec{n}_{\pi_1} \perp \vec{n}_{\pi_2}$ *debe ser* $\vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2} = 0$

$(1, 1, 1)\,(1, 1, -\alpha) = 0$
$1 + 1 - \alpha = 0$
$2 - \alpha = 0$
$\alpha = 2$

Para α = 2, ecuaciones paramétricas de $\pi_1 \cap \pi_2$

La ecuación de la recta r será: $r: \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$

Para obtener la ecuación paramétrica de la recta basta con resolver el sistema de ecuaciones que define a la recta.

En el sistema anterior podemos calcular el siguiente menor de orden 2 no nulo $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3$

por lo que podemos tomar como incógnitas principales: y, z. El sistema a resolver será:

$$\begin{cases} y + z = 3 - x \\ y - 2z = -x \end{cases}$$

Resolviéndolo por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3-x & 1 \\ -x & -2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-6 + 2x + x}{-3} = \frac{-6 + 3x}{-3} = 2 - x$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3-x \\ 1 & -x \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-x - 3 + x}{-3} = 1$$

Por lo que las ecuaciones paramétricas de r serán: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 - \lambda \quad \lambda \in \Re \\ z = 1 \end{cases}$

b) Valor de α / **π_1** y **π_2** *sean paralelos.*

π_1 *y* π_2 *son paralelos si* $\vec{n}_{\pi_1} \,//\, \vec{n}_{\pi_2}$

Deberá ser:

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{1}{-\alpha} \quad \rightarrow \quad \alpha = -1$$

Para $\alpha = -1$ *calcular* $d(\pi_1, \pi_2)$

Para este valor de α, **π_1**: $x + y + z = 3$ *y* **π_2**: $x + y + z = 0$

Como **π_1** // **π_2** , $d(\pi_1, \pi_2) = d(P_1, \pi_2)$ *siendo P_1 un punto de* **π_1**, *por ejemplo, para x = 0 e y = 0, sustituyendo en la ecuación de* **π_1**, $0 + 0 + z = 3 \rightarrow z = 3$, *por lo que* $P_1(0, 0, 3)$

$$d(P_1, \pi_2) = \frac{|0 + 0 + 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$