

Problema 2.2. Dados el punto $O = (0, 0, 0)$ y el plano $\pi: x + y + z = 6$, se pide calcular razonadamente:

- La ecuación de la recta r que pasa por O y es perpendicular al plano π . (1,1 puntos).
- Las coordenadas del punto simétrico de O respecto del plano π . (1,1 puntos).
- La ecuación del plano que contiene al eje X y a la recta r . (1,1 puntos).

Solución:

a) Recta r / r pasa por O y $r \perp \pi$

Como la recta r debe ser perpendicular al plano π , el vector ortogonal al plano π será vector director de la recta r .

Por lo que de la recta r conocemos: Punto $O(0, 0, 0)$ y $\vec{v}_r = (1, 1, 1)$

Ecuaciones de la recta r

$$\text{Paramétrica: } r: \begin{cases} x = 0 + \lambda \\ y = 0 + \lambda \\ z = 0 + \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathfrak{R} \quad \equiv \quad r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathfrak{R}$$

$$\text{Continua: } r: \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{1} \quad \equiv \quad x = y = z$$

b) Simétrico de O respecto de π , O'

Debemos calcular,

- Recta que pasa por el punto O y es perpendicular a π , es la recta obtenida en el apartado anterior. Usaremos su ecuación paramétrica,

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathfrak{R}$$

- Punto de corte entre r y π , M

A partir de la ecuación paramétrica de la recta r , sustituimos los valores de x, y, z de la recta en la ecuación del plano: $\lambda + \lambda + \lambda = 6$, $3\lambda = 6$, $\lambda = 2$

Sustituyendo este valor de λ en la recta, obtenemos el punto $M(2, 2, 2)$

- Obtenemos O' considerando que M es el punto medio del segmento OO' , es decir que

$$M = \frac{O + O'}{2} \rightarrow 2M = O + O' \rightarrow O' = 2M - O = 2(2, 2, 2) - (0, 0, 0) = (4, 4, 4)$$

El simétrico del punto O respecto del plano π es $(4, 4, 4)$

c) Plano que contiene al eje X y a r , ψ

Un vector director del eje X es $(1, 0, 0)$. Un vector director de la recta r es $(1, 1, 1)$. Estos dos vectores no son paralelos (sus coordenadas no son proporcionales) por lo que son vectores directores del plano ψ .

Como punto del plano ψ podemos tomar cualquiera del eje X o de la recta r , por ejemplo consideramos el $(0, 0, 0)$ del eje X .

La ecuación del plano ψ será,

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow z - y = 0 \rightarrow y - z = 0$$

Luego el plano ψ tiene por ecuación $y - z = 0$