Problema 3.1. Dada la función f(t) = a t + b (con a y b constantes reales), se define $F(x) = x\int_{1}^{x+1} f(t)dt$. Se pide obtener razonadamente:

a) La integral $\int_{1}^{x+1} f(t)dt$ *(1,5 puntos).*

b) La expresión de la derivada *F´(x)* de la función *F(x). (0,5 puntos).*

c) La relación entre los valores a y b para la que se verifica: F´´(0) = 0. *(1,3 puntos).*

Solución:

a)

$$\int_{1}^{x+1} f(t)dt = \int_{1}^{x+1}(a\,t+b)dt = \left[a\frac{t^2}{2}+b\,t\right]_1^{x+1} = \left[a\frac{(x+1)^2}{2}+b\,(x+1)\right]-\left[a\frac{1^2}{2}+b\,.1\right]=$$

$$=\frac{a}{2}\left(x^2+2x+1\right)+bx+b-\frac{a}{2}-b=\frac{a}{2}x^2+a\,x+\frac{a}{2}+bx-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}x^2+a\,x+bx=\frac{a}{2}x^2+(a+b)x$$

b)

$$F(x) = x\int_{1}^{x+1} f(t)dt$$

Considerando el resultado obtenido en el apartado anterior,

$$F(x) = x\left[\frac{a}{2}x^2+(a+b)x\right] = \frac{a}{2}x^3+(a+b)x^2$$

luego

$$F'(x) = \frac{3a}{2}x^2+2(a+b)x$$

c) En el apartado anterior obtuvimos F´(x),

$$F'(x) = \frac{3a}{2}x^2+2(a+b)x$$

luego

$$F''(x) = 3\,a\,x+2(a+b)$$

$$F''(0) = 2(a+b)$$

Como debe ser F´´(0) = 0 → 2 (a + b) = 0 → a + b = 0 → a = – b

Finalmente, para que se verifique que F´´(0) = 0 deber ser a = – b.