Matemáticas II Septiembre 2008

Problema 3.2. Para cada número real positivo α, se considera la función $g(x) = x^2 + \alpha$. Se pide calcular razonadamente:

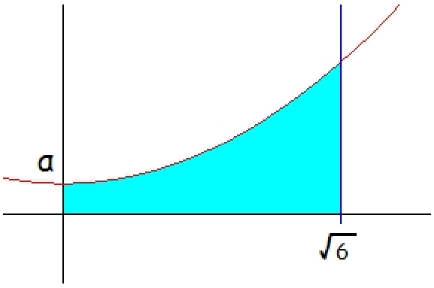
a) El área de la región del plano limitada por el eje X, el eje Y, la recta $x = \sqrt{6}$ y la curva $y = g(x)$. *(2 puntos).*

b) El valor de α para el que la curva $y = x^2 + \alpha$ divide al rectángulo de vértices (0,0), ($\sqrt{6}$,0), ($\sqrt{6}$, 6 + α), (0, 6 + α) en dos regiones de igual área. *(1,3 puntos).*

Solución:

a) $g(x) = x^2 + \alpha,\ \ \alpha > 0$. *Gráficamente es una parábola de vértice (0 , α)*

La región del plano limitada por eje X, eje Y, $x = \sqrt{6}$ *e* $y = g(x)$ *será:*



Calculamos el área de esta región mediante la siguiente integral,

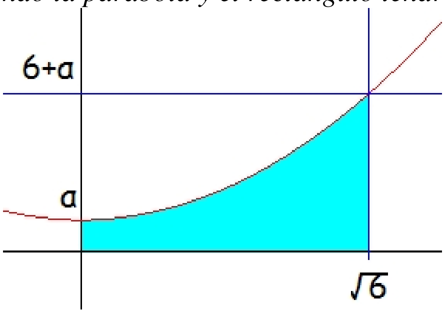
$$\int_0^{\sqrt{6}} \left(x^2+\alpha\right)dx = \left[\frac{x^3}{3}+\alpha\, x\right]_0^{\sqrt{6}} = \left[\frac{\left(\sqrt{6}\right)^3}{3}+\alpha\sqrt{6}\right]-[0] = \frac{6\sqrt{6}}{3}+\alpha\sqrt{6} = 2\sqrt{6}+\alpha\sqrt{6} = (2+\alpha)\sqrt{6}$$

como el valor del área obtenido depende de α, el área pedida podemos escribirla como: $A(\alpha) = (2+\alpha)\sqrt{6}$

b)

$$x = \sqrt{6} \quad \rightarrow \quad g\left(\sqrt{6}\right) = \left(\sqrt{6}\right)^2 + \alpha = 6+\alpha$$

Luego dibujando la parábola y el rectángulo tendríamos,



El área del rectángulo es $R(\alpha) = (6+\alpha)\sqrt{6}$

El área de la zona pintada, según lo calculado en el apartado anterior, $A(\alpha) = (2+\alpha)\sqrt{6}$

$$Debe \quad ser \quad \frac{R(\alpha)}{2} = A(\alpha)$$

$$\frac{(6+\alpha)\sqrt{6}}{2} = (2+\alpha)\sqrt{6}$$

El valor buscado de α es 2.

$$6+\alpha = 4+2\alpha$$

$$6-4 = 2\alpha-\alpha$$

$$2 = \alpha$$