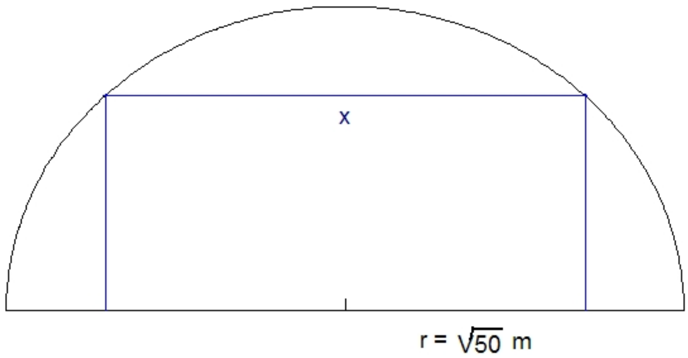
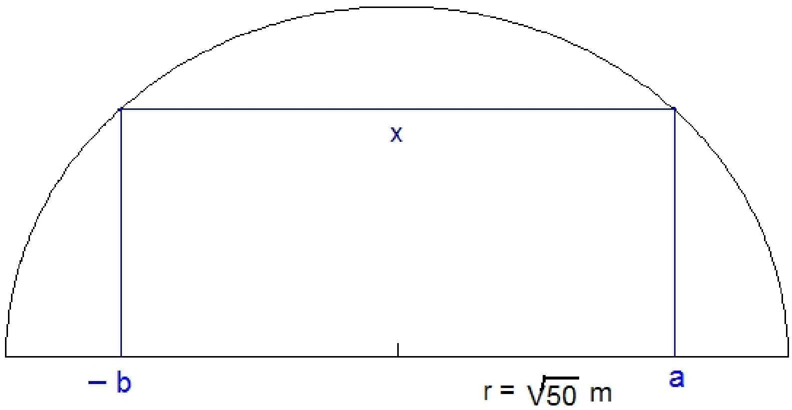
Problema 4.2. En un terreno con forma de semicírculo de radio $\sqrt{50}$ metros, se dibuja un rectángulo que tiene dos vértices sobre la semicircunferencia del perímetro del terreno. Los otros dos vértices del rectángulo están sobre el segmento rectilíneo de dicho perímetro y distan x metros. Obtener razonadamente:

a) El área del rectángulo en función de x. *(1,3 puntos).*
b) El valor de x para el que es máxima el área del rectángulo. *(2 puntos).*

Solución:
a) Del enunciado del problema obtenemos que la representación gráfica de este es:



Situando este gráfico en unos ejes cuyo origen de coordenadas sea el centro desde el que se traza el semicírculo:



Vamos a comprobar que los vértices del rectángulo tienen por abcisa -x/2 y x/2.

Sean a y b dos números positivos y los vértices del rectángulo situados sobre el segmento rectilíneo que tengan de coordenadas (– b , 0) y (a , 0).
Calculemos las coordenadas de los vértices que están sobre la semicircunferencia.
La ecuación de una circunferencia es $\alpha^2+\beta^2=r^2$
En este caso particular,

$$\alpha^2+\beta^2=\left(\sqrt{50}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad \alpha^2+\beta^2=50$$

Las ordenadas de los vértices del rectángulo sobre la semicircunferencia serán,

Para $\alpha=a$ $\quad a^2+\beta^2=50$

$$\beta^2=50-a^2$$

$$\beta=\pm\sqrt{50-a^2}$$

Ahora bien, como el vértice que estamos calculando está sobre el eje X, β > 0, luego

$$\beta=\sqrt{50-a^2}$$

Para $\alpha=-b$ $\quad (-b)^2+\beta^2=50$

$$b^2+\beta^2=50$$

$$\beta=\sqrt{50-b^2}$$

Pero los vértices del rectángulo sobre la semicircunferencia deben tener la misma ordenada, por lo que:

$$\sqrt{50-a^2}=\sqrt{50-b^2}$$

$$50-a^2=50-b^2$$

$$-a^2=-b^2$$

$$a^2=b^2 \quad \rightarrow \quad a=\pm b$$

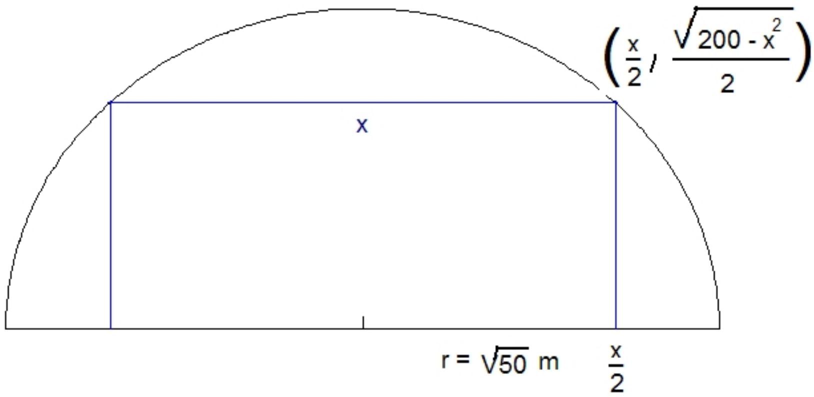
Por la elección que hemos hecho de a y b (ambos positivos), obtenemos que a = b.

Tendiendo en cuenta que $a+b=x \quad \rightarrow \quad a+a=x \quad \rightarrow \quad 2a=x \quad \rightarrow \quad a=\dfrac{x}{2}$

Por lo que la ordenada de los vértices que están sobre la semicircunferencia será:

$$\beta=\sqrt{50-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\sqrt{50-\frac{x^2}{4}}=\sqrt{\frac{200-x^2}{4}}=\frac{\sqrt{200-x^2}}{2}$$

La situación final del gráfico es,



El área del rectángulo será

$$A(x)=x\frac{\sqrt{200-x^2}}{2}=\frac{x\sqrt{200-x^2}}{2}$$

Veamos los valores que puede tomar x. Por definición x es una distancia entre dos puntos, luego $x \geq 0$*. Además, puesto que el rectángulo está construido dentro de una semicircunferencia, se cumplirá que*

$$\frac{x}{2}\leq\sqrt{50} \quad \rightarrow \quad x\leq 2\sqrt{50}. \qquad \textit{Luego} \quad 0\leq x\leq 2\sqrt{50} \quad (\approx \quad 0\leq x\leq 14'14\,)$$

b) ¿x / área es máxima?

$$A(x)=\frac{x\sqrt{200-x^2}}{2}$$

$$A'(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{200-x^2}+x\frac{-2x}{2\sqrt{200-x^2}}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{200-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{200-x^2}}\right)$$

$$A'(x)=0$$

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{200-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{200-x^2}}\right)=0$$

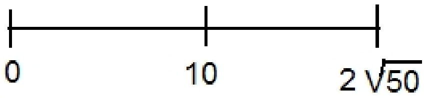
$$\sqrt{200-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{200-x^2}}=0$$

$$200-x^2-x^2=0$$

$$200-2x^2=0 \quad \rightarrow \quad 200=2x^2 \quad \rightarrow \quad x^2=\frac{200}{2} \quad \rightarrow \quad x^2=100 \quad \rightarrow \quad x=\pm 10$$

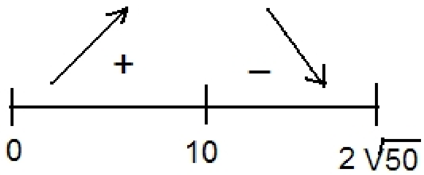
Como los valores de x deben ser mayores o iguales que cero, sólo sirve la solución x = 10.

Veamos ahora si para este valor de x A(x) tiene un máximo, para ello estudiamos el signo de A´ en los siguientes intervalos,



x	$A'(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{200-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{200-x^2}}\right)$
2	$\frac{1}{2}\left(\sqrt{200-2^2}-\frac{2^2}{\sqrt{200-2^2}}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{196}-\frac{4}{\sqrt{196}}\right)=\frac{1}{2}\left(14-\frac{4}{14}\right)=6'85...>0$
12	$\frac{1}{2}\left(\sqrt{200-12^2}-\frac{12^2}{\sqrt{200-12^2}}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{56}-\frac{144}{\sqrt{56}}\right)=-5'87...<0$

Marcando estos resultados en el intervalo anterior,



Luego en x = 10 hay un máximo relativo que es el absoluto de la función A(x) ya que, en su dominio de definición, a la izquierda de 10 A(x) es creciente y a la derecha decreciente.

Finalmente, el área del rectángulo es máxima para x = 10 m.