Problema 1.1. Dada la matriz $A(\alpha)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha-2 \\ 4 & 3 & 2 \\ \alpha & \alpha & -6 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular, en función de α, el determinante de la matriz $A(\alpha)$, escribiendo los cálculos necesarios. (*1,3 puntos*).

b) Determinar, razonadamente, los números reales α para los que el determinante de la matriz inversa de $A(\alpha)$ es igual a 1/66. (*2 puntos*).

Solución:

a) Calculamos el determinante de la matriz por Sarrus,

$$|A(\alpha)|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & \alpha-2 \\ 4 & 3 & 2 \\ \alpha & \alpha & -6 \end{vmatrix}=-18+4\alpha^2-8\alpha+4\alpha-3\alpha^2+6\alpha-2\alpha+48=\alpha^2+30$$

b) De lo obtenido anteriormente, sabemos que el determinante de la matriz A(α) es distinto de cero (para cualquier valor de α, $\alpha^2+30\neq 0$)

Como el determinante de A(α) es distinto de cero, existe la inversa de la matriz A(α). Y además sabemos que,

$$|A^{-1}(\alpha)|=\frac{1}{|A(\alpha)|}=\frac{1}{\alpha^2+30}$$

buscamos $\alpha \,/\, \frac{1}{\alpha^2+30}=\frac{1}{66} \;\rightarrow\; \alpha^2+30=66 \;\rightarrow\; \alpha^2=36 \;\rightarrow\; \alpha=\pm\sqrt{36} \;\rightarrow\; \alpha=\pm 6$

Solución: $\alpha_1=-6$ *ó* $\alpha_2=6$