Problema 1.2. Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \\ 5x + 7y + \alpha z = 0 \end{cases}$, se pide:

a) Deducir, razonadamente, para qué valores de α el sistema sólo admite la solución (x, y, z) = (0,0,0). *(1,5 puntos).*

b) Resolver, razonadamente, el sistema para el valor de α que lo hace indeterminado. *(1,8 puntos).*

Solución:
Estudiemos el sistema.
Llamando A a la matriz de coeficientes y A´ a la matriz ampliada,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & \alpha \end{pmatrix} \quad y \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 7 & \alpha & 0 \end{array}\right)$$

Como el sistema es homogéneo, sabemos que es compatible (rang(A) = rang(A´)).
Estudiemos el máximo rango posible de A,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & \alpha \end{vmatrix} = 3\alpha + 14 + 20 - 15 - 28 - 2\alpha = \alpha - 9$$

$$\alpha - 9 = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = 9$$

$$Para\ \alpha \neq 9, \quad |A| \neq 0 \quad luego \quad rang(A) = 3 = n^{o}\ de\, incógnitas \quad \rightarrow \quad Sistema\ Compatible\ Deteminado$$

como el sistema es homogéneo la solución es la trivial, x = y = z = 0

Para α = 9, estudiemos la matriz A resultante. Para este valor de α sabemos que $|A|$ *= 0, luego rang(A)* ≤ 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Busquemos un menor de orden dos no nulo, por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad rang(A) = 2$$

luego rang(A) = 2 < 3 = nº de incógnitas → Sistema Compatible Indeterminado.

De lo estudiado anteriormente, las respuestas a cada uno de los apartados será:

a) El sistema sólo admite la solución (x , y , z) = (0 , 0 , 0) (solución trivial) para α ≠ 9

b) El valor de α que hace al sistema indeterminado es α = 9
Para este valor de α la solución será:
Utilizamos las ecuaciones e incógnitas correspondientes al menor de orden 2 no nulo, es decir,

$$\begin{cases} x+y=-z \\ 2x+3y=-4z \end{cases}$$ *Resolviéndolo por Cramer,*

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -z & 1 \\ -4z & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}=\frac{-3z+4z}{1}=z$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -z \\ 2 & -4z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}=\frac{-4z+2z}{1}=-2z$$

Por tanto, para $\alpha = 9$ la solución del sistema es:

$$\begin{cases} x=\lambda \\ y=-2\lambda \qquad \lambda \in \Re \\ z=\lambda \end{cases}$$