Problema 2.2. Sea π el plano de ecuación π: 3 x + 2 y + 4 z – 12 = 0, se pide calcular razonadamente:

a) Las ecuaciones de los dos planos paralelos a π que distan 5 unidades de π. (*1,2 puntos*).
b) Los tres puntos *A*, *B* y *C,* intersección del plano π con cada uno de los tres ejes coordenados. (*0,6 puntos*).
c) Los tres ángulos del triángulo *ABC*. (*1,5 puntos*).

Solución:

a) Ecuaciones de los planos paralelos a π que distan 5 unidades de π.

Los planos paralelos a π tienen por ecuación, π´: 3 x + 2 y + 4 z + D = 0.

Como estos dos planos son paralelos, la distancia entre ellos la calculamos de la siguiente forma:

$d(\pi,\pi') = d(P_\pi,\pi'),$ *siendo* P_π *un punto cualquiera del plano* π.

P_π *podemos obtenerlo para x = y = 0, en la ecuación del plano π, luego: 4 x – 12 = 0 → z = 3 →* *→* P_π *(0 , 0 , 3)*

$$d(P_\pi,\pi') = \frac{|3.0+2.0+4.3+D|}{\sqrt{3^2+2^2+4^2}} = \frac{|12+D|}{\sqrt{9+4+16}} = \frac{|12+D|}{\sqrt{29}}$$

y debe ser $$\frac{|12+D|}{\sqrt{29}} = 5 \;\rightarrow\; \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{12+D}{\sqrt{29}} = 5 \;\rightarrow\; 12+D = 5\sqrt{29} \;\rightarrow\; D = -12+5\sqrt{29} \\ \dfrac{12+D}{\sqrt{29}} = -5 \;\rightarrow\; 12+D = -5\sqrt{29} \;\rightarrow\; D = -12-5\sqrt{29} \end{array} \right.$$

Finalmente, las ecuaciones de los planos pedidos son:

$$\pi_1 : 3x+2y+4z-12+5\sqrt{29} = 0 \qquad \wedge \qquad \pi_2 : 3x+2y+4z-12-5\sqrt{29} = 0$$

b) Los tres puntos A, B y C, intersección del plano π con cada uno de los tres ejes coordenados.

A, corte del plano π con eje X

$$\begin{cases} 3x+2y+4z-12=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \rightarrow \quad 3x-12=0 \quad \rightarrow \quad x=4 \quad \rightarrow \quad A(4,0,0)$$

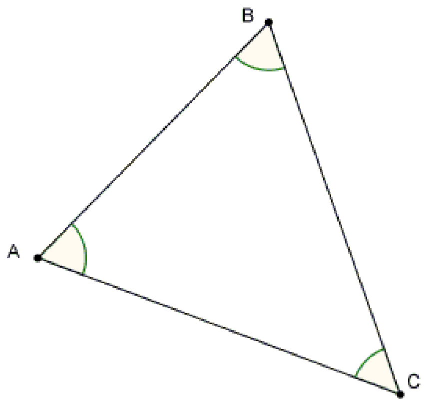
B, corte del plano π con eje Y

$$\begin{cases} 3x+2y+4z-12=0 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases} \rightarrow \quad 2y-12=0 \quad \rightarrow \quad y=4 \quad \rightarrow \quad B(0,6,0)$$

C, corte del plano π con eje Z

$$\begin{cases} 3x+2y+4z-12=0 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow \quad 4z-12=0 \quad \rightarrow \quad z=3 \quad \rightarrow \quad C(0,0,3)$$

c) Los tres ángulos del triángulo ABC.



$$\hat{A} = \left(\overrightarrow{AB} \,\widehat{,}\, \overrightarrow{AC} \right)$$

$$\overrightarrow{AB} = (0,6,0) - (4,0,0) = (-4,6,0)$$

$$\overrightarrow{AC} = (0,0,3) - (4,0,0) = (-4,0,3)$$

$$\cos \hat{A} = \frac{\left| \overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC} \right|}{\left| \overrightarrow{AB} \right| \left| \overrightarrow{AC} \right|} = \frac{\left| (-4,6,0).(-4,0,3) \right|}{\sqrt{(-4)^2 + 6^2 + 0^2}\sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 3^2}} =$$

$$= \frac{|16|}{\sqrt{16+36}\sqrt{16+9}} = \frac{16}{\sqrt{52}\sqrt{25}} = \frac{16}{5\sqrt{52}}$$

$$\hat{A} = 63'6560º$$

$$\hat{B} = \left(\overrightarrow{BA} \,\widehat{,}\, \overrightarrow{BC} \right)$$

$$\overrightarrow{BA} = (4,-6,0) \quad \left(\textit{es el opuesto del } \overrightarrow{AB} \textit{ calculado anteriormente} \right)$$

$$\overrightarrow{BC} = (0,0,3) - (0,6,0) = (0,-6,3)$$

$$\cos \hat{B} == \frac{\left| (4,-6,0).(0,-6,3) \right|}{\sqrt{4^2 + (-6)^2 + 0^2}\sqrt{0^2 + (-6)^2 + 3^2}} = \frac{|36|}{\sqrt{16+36}\sqrt{36+9}} = \frac{16}{\sqrt{52}\sqrt{45}}$$

$$\hat{B} = 41'9088º$$

Finalmente, $\hat{C} = 180º - \hat{A} - \hat{B} = 74'4352º$