Problema 3.1. Se consideran las funciones reales $f(x) = 2x^2 + 12x - 6$ y $g(x) = (x - 2)(x^2 + 9)$. Se pide obtener razonadamente:

a) Las ecuaciones de las asíntotas a la gráfica de la función $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *(1,6 puntos).*

b) La función $H(x) = \displaystyle\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$ *que cumple* $H(3) = \dfrac{\pi}{3}$. *(1,7 puntos).*

Solución:

a) Las ecuaciones de las asíntotas a la gráfica de la función $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x^2 + 12x - 6}{(x-2)(x^2+9)} = \frac{2x^2 + 12x - 6}{x^3 - 2x^2 + 9x - 18}$$

Asíntota horizontal,

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+12x-6}{x^3-2x^2+9x-18} = \left(\frac{+\infty}{-\infty}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x} = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+12x-6}{x^3-2x^2+9x-18} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad y = 0 \quad \textit{es la asíntota horizontal}$$

Asíntotas verticales,

Calculemos las raíces del denominador,

$$(x-2)(x^2+9) = 0 \quad \left\langle \begin{array}{l} x - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2 \\ x^2 + 9 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = -9 \quad \textit{sin raíces reales} \end{array}\right.$$

Por lo que la posible asíntota vertical será la recta x = 2, comprobemos si lo es calculando el límite siguiente,

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)} = \frac{2\,.\,2^2 + 12\,.\,2 - 6}{(2-2)(2^2+9)} = \frac{26}{0} = \infty$$

Por lo tanto ***x = 2 es la asíntota vertical****.*

Asíntota oblicua,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{2x^2+12x-6}{x^3-2x^2+9x-18}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+12x-6}{x^4-2x^3+9x^2-18x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{x^4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x^2} = 0$$

y obtendríamos el mismo resultado al calcular el límite cuando x → +∞; por lo tanto ***no hay asíntota oblicua****.*

b)

$$H(x) = \int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx \quad / \quad H(3) = \frac{\pi}{3}.$$

$$H(x) = \int \frac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)}\,dx =$$

Descomponemos el integrando,

$$\frac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+9}=\frac{A(x^2+9)+(Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+9)}$$

luego, $2x^2+12x-6=A(x^2+9)+(Bx+C)(x-2)$

Calculamos los valores de A, B y C dando valores a x:

$x=2 \;\rightarrow\; 26=13A \;\rightarrow\; A=2$

$x=0 \;\rightarrow\; -6=2\,.\,9+C(-2) \;\rightarrow\; -6=18-2C \;\rightarrow\; 2C=18+6 \;\rightarrow\; 2C=24 \;\rightarrow\; C=12$

$x=1 \;\rightarrow\; 8=10A-B-C$; *sustituyendo los valores obtenidos de A y C,*

$8=10\,.\,2-B-12 \;\rightarrow\; 8=8-B \;\rightarrow\; B=0$

Por lo tanto,

$$\frac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)}=\frac{2}{x-2}+\frac{0x+12}{x^2+9}=\frac{2}{x-2}+\frac{12}{x^2+9}$$

$$y \quad H(x)=\int\frac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)}\,dx=\int\left(\frac{2}{x-2}+\frac{12}{x^2+9}\right)dx=\int\frac{2}{x-2}dx+\int\frac{12}{x^2+9}dx\overset{*}{=}$$

calculamos cada integral por separado

$$\int\frac{2}{x-2}dx=2Ln|x-2|$$

$$\int\frac{12}{x^2+9}dx=12\int\frac{1}{9+x^2}dx=12\int\frac{\frac{1}{9}}{\frac{9+x^2}{9}}dx=12\int\frac{\frac{1}{9}}{1+\frac{x^2}{9}}dx=12\int\frac{\frac{1}{9}}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}dx=$$

$$=12\,\frac{1}{3}\int\frac{\frac{1}{3}}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}dx=4arctg\,\frac{x}{3}$$

$$\overset{*}{=}2Ln|x-2|+4arctg\,\frac{x}{3}+C$$

Calculemos el valor de C para que se cumpla la condición exigida,

$$H(3)=\frac{\pi}{3}$$

$$H(3)=2Ln|3-2|+4arctg\left(\frac{3}{3}\right)+C$$

$$\frac{\pi}{3}=2Ln\,1+4arctg\,1+C \;\rightarrow\; \frac{\pi}{3}=2.0+4\frac{\pi}{4}+C \;\rightarrow\; \frac{\pi}{3}=\pi+C \;\rightarrow\; C=\frac{\pi}{3}-\pi=\frac{-2\pi}{3}$$

Finalmente, la función pedida es:

$$H(x)=2Ln|x-2|+4\;arctg\left(\frac{x}{3}\right)-\frac{2\pi}{3}$$