**Problema 3.2.** Dada la función real $f(x) = \dfrac{8}{1+x^2}$ , se pide calcular razonadamente:

*a)* Las derivadas primera y segunda de la función f (x). *(0,8 puntos).*
*b)* Los puntos de inflexión de la curva y = f (x). *(1 punto).*
*c)* La pendiente máxima de las rectas tangentes a la curva y = f (x) . *(1,5 puntos).*

*Solución:*

*a) f(x) y f´´(x)*

$$f'(x) = \frac{-8\,.\,2x}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{-16x}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-16\left(1+x^2\right)^2 - (-16x)\,2\,(1+x^2)\,2x}{\left(1+x^2\right)^4} = \left(\begin{matrix}\text{simplificando entre}\\ (1+x^2)\end{matrix}\right) = \frac{-16\left(1+x^2\right) - (-16x)\,2\;\,2x}{\left(1+x^2\right)^3} =$$

$$= \frac{-16-16x^2+64x^2}{\left(1+x^2\right)^3} = \frac{48x^2-16}{\left(1+x^2\right)^3} = \frac{16\left(3x^2-1\right)}{\left(1+x^2\right)^3}$$

*b) Puntos de inflexión de y = f(x).*

$$y = \frac{8}{1+x^2}$$

*Veamos el dominio de esta función, $1 + x^2 = 0$; $x^2 = -1$; sin soluciones reales, luego Dom y = R*
*Para calcular los puntos de inflexión estudiemos el signo de y´´*

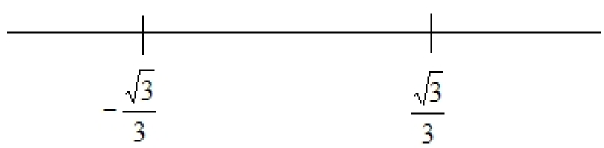
*Del apartado anterior sabemos que* $y'' = \dfrac{16\left(3x^2-1\right)}{\left(1+x^2\right)^3}$

*Busquemos las raíces del numerador y denominador,*

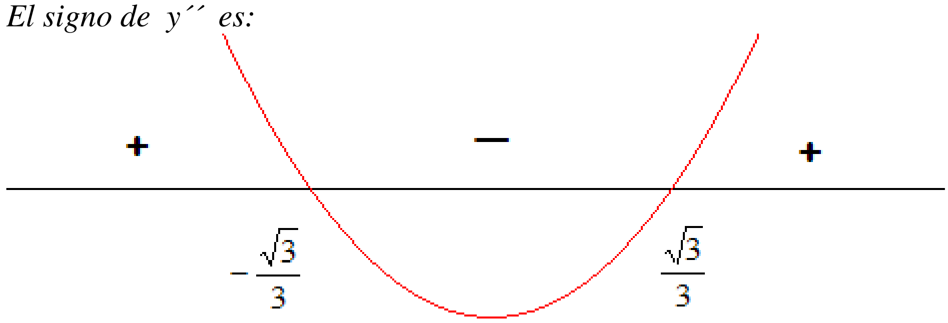
*$16\,(\,3\,x^2 - 1\,) = 0$; $3\,x^2 - 1 = 0$; $3\,x^2 = 1$; $x^2 = 1/3$;* $x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{3}} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

*$(\,1 + x^2\,)^3 = 0$; $1 + x^2 = 0$; sin soluciones reales (visto anteriormente)*

*Representando las soluciones obtenidas en la recta real:*




*En y´´ el denominador es $(\,1 + x^2\,)^3$ , pero $1 + x^2$ siempre es positivo, luego $(\,1 + x^2\,)^3$ también, por lo que el signo de y´´ sólo depende del numerador.*
*El numerador es $16\,(\,3\,x^2 - 1\,)$, como 16 es positivo sólo debemos estudiar el signo de $3\,x^2 - 1$, que gráficamente es una parábola con coeficiente de $x^2$ positivo.*
*El signo de y´´ es:*



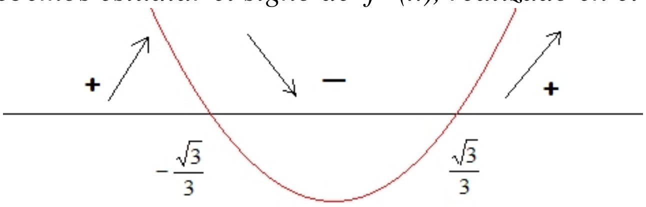

*Para los valores de x en que cambia de signo la segunda derivada hay punto de inflexión. Por lo que hay dos puntos de inflexión,*

$$Para \quad x=\frac{-\sqrt{3}}{3} \quad \rightarrow \quad y=\frac{8}{1+\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{8}{1+\frac{3}{9}}=\frac{8}{\frac{12}{9}}=\frac{72}{12}=6$$

$$Para \quad x=\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \rightarrow \quad y=\frac{8}{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{8}{1+\frac{3}{9}}=\frac{8}{\frac{12}{9}}=\frac{72}{12}=6$$

*Los puntos de inflexión son* $\left(\frac{-\sqrt{3}}{3},6\right)$ *y* $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},6\right)$

*c) La pendiente máxima de las rectas tangentes a $y = f(x)$.*
*La pendiente de las rectas tangentes a $y = f(x)$ es $f'(x)$, buscamos el máximo de $f'(x)$.*
*Para ello debemos estudiar el signo de $f''(x)$, realizado en el apartado anterior*




*El máximo relativo se alcanza en*

$$x=\frac{-\sqrt{3}}{3} \quad \rightarrow \quad f'\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{-16\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)}{\left(1+\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)^2\right)^2}=\frac{\frac{16\sqrt{3}}{3}}{\left(1+\frac{3}{9}\right)^2}=\frac{\frac{16\sqrt{3}}{3}}{\left(\frac{12}{9}\right)^2}=\frac{\frac{16\sqrt{3}}{3}}{\frac{144}{81}}=$$

$$=\frac{81\,.\,16\sqrt{3}}{144\,.\,3}=\frac{4^2\,3^4\,\sqrt{3}}{4^2\,3^2\,3}=3\sqrt{3}$$

*Veamos si este máximo relativo es el absoluto. Para ello vamos a representar gráficamente la función*

$$g(x)=f'(x)=\frac{-16x}{\left(1+x^2\right)^2}$$

*Dom g(x) = R*

$( 1 + x^2 )^2 = 0; \quad 1 + x^2 = 0;$ *sin soluciones reales*

*Puntos de corte con los ejes coordenados*

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \quad \rightarrow \quad y=0 \\ y=0 \quad \rightarrow \quad \frac{-16x}{\left(1+x^2\right)^2}=0 \quad \rightarrow \quad -16x=0 \quad \rightarrow \quad x=0 \end{array}\right\} \quad (0,0) \quad \textit{único punto de corte}$$

*Asíntotas*

*Asíntota vertical, como el domino de la función es R, no hay*

*Asíntota horizontal,*

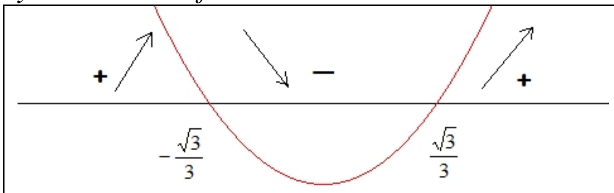
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-16x}{\left(1+x^2\right)^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-16x}{x^4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-16}{x^3}=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-16x}{\left(1+x^2\right)^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-16x}{x^4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-16}{x^3}=0 \end{array}\right. \quad \textit{Luego } y = 0 \textit{ es la asíntota horizontal}$$

*Asíntota oblicua,*

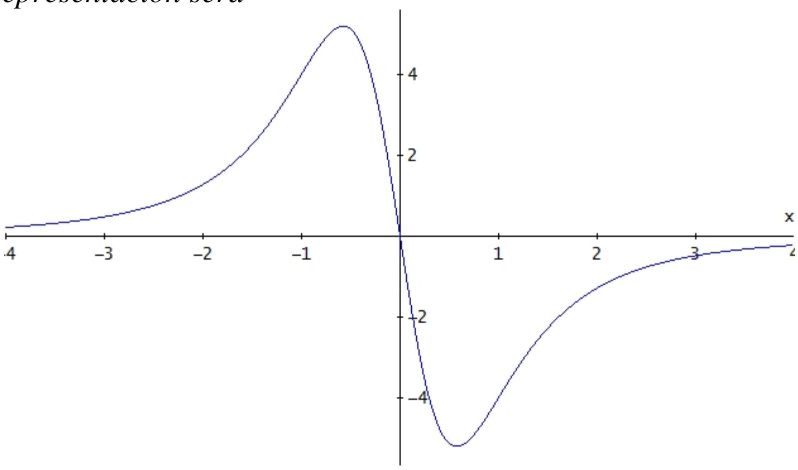
*Como g(x) es un cociente de dos polinomios, para que tenga asíntota oblicua debe cumplirse que grd(núm) – grd(deno) = 1, pero lo que ocurre es que 1 – 4 = – 3 ≠ 1*
*No hay asíntota oblicua*

*Monotonía*

*Debemos estudiar el signo de g´(x) = f´´(x). Este estudio ya lo hemos realizado en el apartado anterior y el resultado fue*

| | |
|---|---|
|  | $g(x)$ *es creciente en* $\left(-\infty, \frac{-\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$<br>$g(x)$ *es decreciente en* $\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$<br>*Luego en* $x = \frac{-\sqrt{3}}{3}$ *hay un máximo* $\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}, 3\sqrt{3}\right)$<br>*y en* $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ *hay un mínimo* $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -3\sqrt{3}\right)$ |

*La representación será*



*Por lo que el máximo relativo es el absoluto.*

*Finalmente, la pendiente máxima es* $3\sqrt{3}$.