Problema 4.1. A las 7 de la mañana, una lancha *A* está situada a 150 km al este de otra lancha *B*. La lancha *A* navega hacia el oeste a una velocidad constante de 40 km/h y la lancha *B* se dirige hacia el norte a 30 km/h. Si se mantienen estos rumbos, averiguar razonadamente a qué hora estarán ambas lanchas a distancia mínima. *(3,3 puntos).*

Solución:

Gráficamente, el problema podemos resumirlo en,

Llamamos x = tiempo transcurrido

Situamos el origen de coordenadas en el punto B, de forma que inicialmente –a las 7 de la mañana- la lancha B está en (0,0) y la A en (150,0).

Al cabo de x horas,

la lancha B habrá recorrido 30 x km y estará en el punto (0 , 30 x)

la lancha A habrá recorrido 40 x km y estará en el punto (150 – 40 x , 0)

La distancia entre ellas será:

$$d(A,B) = d((0, 30x), (150-40x, 0)) = \sqrt{[0-(150-40x)]^2+(30x-0)^2} = \sqrt{(40x-150)^2+(30x)^2} =$$

$$= \sqrt{1600x^2-12000x+22500+900x^2} = \sqrt{2500x^2-12000x+22500} = \sqrt{100\left(25x^2-120x+225\right)} =$$

$$= 10\sqrt{25x^2-120x+225}$$

$$d' = 10\frac{50x-120}{2\sqrt{25x^2-120x+225}} = 5\frac{50x-120}{\sqrt{25x^2-120x+225}}$$

Buscamos el mínimo de d, estudiemos el signo de d´.

Primero obtengamos el dominio de la función d.

$$25x^2-120x+225=0$$

$$x = \frac{-(-120)\pm\sqrt{(-120)^2-4\,.\,25\,.\,225}}{2\,.\,25} = \frac{120\pm\sqrt{14400-22500}}{50} =$$

$$= \frac{120\pm\sqrt{-8100}}{50} \quad \text{No tiene soluciones reales}$$

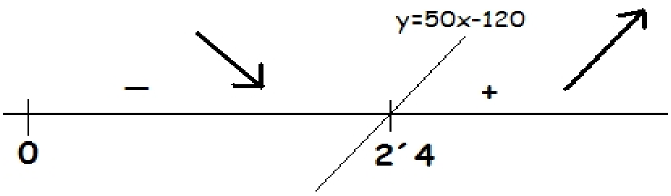
Como el coeficiente de x^2 es 25>0, 25 x^2 – 120 x + 225 > 0 para todos los reales.

Y teniendo en cuenta la definición de la función d, mide la distancia entre dos puntos, Dom d = [0 , + ∞)

Veamos, ahora, el signo de d´,

En d´ el denominador, según lo obtenido anteriormente, es siempre positivo, por lo tanto el signo de d´ sólo depende del numerador. Veámoslo

50 x – 120 = 0; 50 x = 120; x = 120/50 = 2´4



Por lo tanto en x = 2´4 hay un mínimo relativo que además es el absoluto puesto que la función a la izquierda de 2´4 es decreciente y a la derecha creciente.

2´4 h = 2 h 24 min

Por tanto: ***ambas lanchas estarán a distancia mínima a las 9h 24min.***