PROBLEMA A.1.

Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} \alpha\, x+\alpha^3\ y+z=1 \\ \alpha\, x+\alpha\ y+z=1 \\ \alpha^3\ x+\alpha\ y+z=1 \end{cases}$ donde α es un parámetro real, se pide:

a) Deducir, razonadamente, para qué valores de α es compatible determinado. *(4 puntos)*
b) Deducir, razonadamente, para qué valores de α es compatible indeterminado. *(3 puntos)*
c) Resolver el sistema en todos los casos en que es compatible indeterminado. *(3 puntos)*

Solución:
Estudiemos el sistema. La matriz ampliada del sistema es:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \alpha^3 & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 & 1 \\ \alpha^3 & \alpha & 1 & 1 \end{array}\right)$$

La matriz de coeficientes, A, es 3x3 por lo que su máximo rango es 3.
La matriz ampliada, A´, es 3x4 por lo que su máximo rango, también, será 3.
Empezamos estudiando el rango de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha^3 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 \\ \alpha^3 & \alpha & 1 \end{vmatrix} = \alpha^2+\alpha^2+\alpha^6-\alpha^4-\alpha^2-\alpha^4 = \alpha^6-2\alpha^4+\alpha^2 = \alpha^2\left(\alpha^4-2\alpha^2+1\right)$$

$$\alpha^2\left(\alpha^4-2\alpha^2+1\right)=0 \ \rightarrow \ \begin{cases} \alpha^2=0 \ \rightarrow \ \alpha=0 \\ \alpha^4-2\alpha^2+1=0 \ \rightarrow \ \alpha^2=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4.1.1}}{2.1}=\dfrac{2\pm\sqrt{4-4}}{2}=\dfrac{2}{2}=1 \ \rightarrow \ \alpha=\pm\sqrt{1}=\pm 1 \end{cases}$$

A partir de este estudio iremos obteniendo las respuestas a los apartados.

a)

Para $\alpha \neq -1, 0, 1$ se cumple $|A| \neq 0$ luego rang(A) = 3 y como el máximo rango de A´ es 3, rang(A´) = 3
Luego, rang(A) = rang(A´) = 3 = nº de incógnitas $\rightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

Por lo tanto el sistema es compatible determinado para $\alpha \neq -1, 0, 1$.

b) Estudiemos el sistema para los valores de $\alpha = -1, 0, 1$
Sabemos que para estos valores de α $|A| = 0$ luego rang(A) $\leq$ 2.
$\alpha = -1$

La matriz ampliada es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

Como las tres filas son iguales y sus elementos no nulos $\rightarrow$ *rang(A´) = 1 = rang(A) < 3 = nº de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.*

$\alpha = 0$

La matriz ampliada es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

Las tres filas son iguales, a efectos de cálculo de rango nos podemos quedar con una sola fila.
Como $A = (\ 0\ \ 0\ \ 1\ )$ $\rightarrow$ *rang(A) = 1 (hay un elemento no nulo en la matriz).*
Análogamente, $A' = (\ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ )$ $\rightarrow$ *rang(A´) = 1*
Luego, rang(A´) = 1 = rang(A) < 3 = nº de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

$\alpha = 1$

La matriz ampliada es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

Como las tres filas son iguales y sus elementos no nulos $\rightarrow$ *rang(A´) = 1 = rang(A) < 3 = nº de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.*

La respuesta del apartado b) es: el sistema es compatible indeterminado para $\alpha = -1, 0, 1$.

c) Resolvamos el sistema en los casos en que es compatible indeterminado.

$\alpha = -1$, *rang(A´) = 1 = rang(A)*

El menor no nulo que proporciona el rango de A es, por ejemplo, $|a_{13}| = |1| \neq 0$.
La ecuación que tenemos para resolver será: $-x - y + z = 1$ $\rightarrow$ $z = 1 + x + y$

Para $\alpha = -1$*, la solución del sistema es:* $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 1 + \lambda + \mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \Re$

$\alpha = 0$, *rang(A´) = 1 = rang(A)*

El menor no nulo que proporciona el rango de A es, por ejemplo, $|a_{13}| = |1| \neq 0$.
La ecuación que tenemos para resolver será: $0x + 0y + z = 1$ $\rightarrow$ $z = 1$

Para $\alpha = 0$*, la solución del sistema es:* $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \quad \lambda, \mu \in \Re \\ z = 1 \end{cases}$

$\alpha = 1$, *rang(A´) = 1 = rang(A)*

El menor no nulo que proporciona el rango de A es, por ejemplo, $|a_{11}| = |1| \neq 0$.
La ecuación que tenemos para resolver será: $x + y + z = 1$ $\rightarrow$ $x = 1 - y - z$

Para $\alpha = 1$*, la solución del sistema es:* $\begin{cases} x = 1 - \lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \Re$