PROBLEMA A.2. Se pide obtener razonadamente:

a) La ecuación del plano π que pasa por los puntos O = (0, 0, 0), A = (6, – 3, 0) y B = (3, 0, 1). *(3 puntos)*

b) La ecuación de la recta r que pasa por el punto P = (8, 7, – 2) y es perpendicular al plano π. *(3 puntos)*

c) El punto Q del plano π cuya distancia al punto P es menor que la distancia de cualquier otro punto del plano π al punto P. *(4 puntos)*

Solución:

a) La ecuación del plano π que pasa por los puntos O = (0, 0, 0), A = (6, – 3, 0) y B = (3, 0, 1).

A partir de los tres puntos del plano calculamos los dos vectores directores del plano:

$$\vec{OA} = (6,-3,0) - (0,0,0) = (6,-3,0)$$

$$\vec{OB} = (3,0,1) - (0,0,0) = (3,0,1)$$

y tomando como punto del plano, por ejemplo, O = (0, 0, 0), podemos calcular la ecuación del plano π

Ecuación paramétrica $\begin{cases} x = 0 + 6\lambda + 3\mu \\ x = 0 - 3\lambda + 0\mu \quad \lambda, \mu \in \Re \\ x = 0 + 0\lambda + \mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 6\lambda + 3\mu \\ x = -3\lambda \qquad \lambda, \mu \in \Re \\ x = \mu \end{cases}$

Ecuación implícita $\begin{vmatrix} 6 & 3 & x-0 \\ -3 & 0 & y-0 \\ 0 & 1 & z-0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 6 & 3 & x \\ -3 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -3x - 6y + 9z = 0,$

$$\text{simplificando entre } -3, \quad x + 2y - 3z = 0$$

b) Ecuación de la recta r que pasa por el punto P = (8, 7, – 2) y es perpendicular al plano π: x + 2 y – 3 z = 0

Como $r \perp \pi \rightarrow \vec{v}_r = \vec{n}_\pi \rightarrow \vec{v}_r = (1, 2, -3)$

De la recta r tenemos $\begin{cases} \text{Punto} \quad P = (8,7,-2) \\ \text{vector director} \quad \vec{v}_r = (1, 2, -3) \end{cases}$

Por lo que:

Ecuación paramétrica: $\begin{cases} x = 8 + \lambda \\ y = 7 + 2\lambda \qquad \lambda \in \Re \\ z = -2 - 3\lambda \end{cases}$

Ecuación continua: $\dfrac{x-8}{1} = \dfrac{y-7}{2} = \dfrac{z+2}{-3}$

c) $¿Q \in \pi? \quad / \quad d(Q,P) \le d(P_\pi, P) \quad \forall P_\pi \in \pi$

Como $r \perp \pi$, *el punto Q será el de corte entre el plano π y la recta r.*

$$\begin{cases} r \\ \pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 8 + \lambda \\ y = 7 + 2\lambda \\ z = -2 - 3\lambda \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$8 + \lambda + 2(7 + 2\lambda) - 3(-2 - 3\lambda) = 0$$
$$8 + \lambda + 14 + 4\lambda + 6 + 9\lambda = 0$$
$$14\lambda + 28 = 0$$
$$14\lambda = -28$$
$$\lambda = -2$$

Sustituyendo este valor de λ *en la ecuación de la recta*

$x = 8 - 2 = 6$

$y = 7 + 2 (- 2) = 3$

$z = - 2 - 3 (- 2) =- 2 + 6 = 4$

Por lo tanto $Q (6, 3, 4)$