PROBLEMA B.1. Dadas las matrices

$$A(x) = \begin{pmatrix} x+2 & 4 & 3 \\ x+2 & 6 & 2 \\ x+3 & 8 & 2 \end{pmatrix} \qquad y \qquad B(y) = \begin{pmatrix} y+1 & 4 & 3 \\ y+2 & 6 & 2 \\ y+3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) Obtener razonadamente el valor de x para que el determinante de la matriz A(x) sea 6. *(4 puntos)*
b) Calcular razonadamente el determinante de la matriz 2A(x). *(2 puntos)*
c) Demostrar que la matriz B(y) no tiene matriz inversa para ningún valor real de y. *(4 puntos)*

Solución:

a) ¿x? / $|A(x)| = 6$

$$|A(x)| = \begin{vmatrix} x+2 & 4 & 3 \\ x+2 & 6 & 2 \\ x+3 & 8 & 2 \end{vmatrix} = \begin{matrix} F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} x+2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -2(x+2)-4-6+4(x+2) = 2(x+2)-10 = 2x+4-10 = 2x-6$$

$2x - 6 = 6 \;\rightarrow\; 2x = 12 \;\rightarrow\; x = 6$

Por lo tanto, para que $|A(x)| = 6$ *debe ser* $x = 6$.

b)

$|2A(x)| = \{ \text{como } A(x) \text{ es } 3 \times 3 \} = 2^3 \, |A(x)| = 8\,(2x - 6) = 16x - 48$

c)

$$|B(y)| = \begin{vmatrix} y+1 & 4 & 3 \\ y+2 & 6 & 2 \\ y+3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} y+1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \{como\ F_3 = 2xF_2\} = 0$$

Es decir que, independientemente del valor de y, $|B(y)| = 0$*, luego la matriz B(y) no tiene inversa para ningún valor real de y.*