PROBLEMA B.2. Dadas las dos rectas r y s de ecuaciones

$$r : \frac{x-4}{3} = \frac{y-4}{2} = z-4 \qquad y \qquad s : x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}.$$

se pide calcular razonadamente:

a) Las coordenadas del punto P de intersección de las rectas r y s. *(3 puntos)*
b) El ángulo que forman las rectas r y s. *(3 puntos)*
c) Ecuación implícita A x + B y + C z + D = 0 del plano π que contiene a las rectas r y s. *(4 puntos)*

Solución:

a) Punto P de intersección de las rectas r y s.

Escribamos las ecuaciones paramétricas de las rectas r y s,.

$$r : \begin{cases} x = 4 + 3\lambda \\ y = 4 + 2\lambda \quad \lambda \in \Re \\ z = 4 + \lambda \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = \mu \\ y = 2\mu \quad \mu \in \Re \\ z = 3\mu \end{cases}$$

Buscamos el punto de corte entre r y s resolviendo el sistema que se obtiene al igualar las ecuaciones de las rectas,

$$\begin{cases} 4 + 3\lambda = \mu \\ 4 + 2\lambda = 2\mu \\ 4 + \lambda = 3\mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3\lambda - \mu = -4 \\ 2\lambda - 2\mu = -4 \\ \lambda - 3\mu = -4 \end{cases} \rightarrow A' = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & -4 \\ 2 & -2 & -4 \\ 1 & -3 & -4 \end{array}\right)$$

Estudiemos el rango de A´,

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 2 & -2 & -4 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \\ f_2 - f_1 \\ f_3 - f_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \{ f_3 = 2 \, x \, f_2 \} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 2 = -4 \neq 0 \quad \rightarrow \quad rang(A') = 2$$

Estudiemos el rango de A,

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \quad \rightarrow \quad rang(A) = 2$$

Como $rang(A) = rang(A') = 2 = n^{\circ}$ *de incógnitas* $\rightarrow$ *Sistema Compatible Determinado*

Resolvemos el sistema usando las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 no nulo.

El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} 3\lambda - \mu = -4 \\ 2\lambda - 2\mu = -4 \end{cases} \quad \begin{matrix} -2 \, x \, 1^{a} \\ 2^{a} \end{matrix} \begin{cases} -6\lambda + 2\mu = 8 \\ 2\lambda - 2\mu = -4 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones: $-4\lambda = 4 \quad \rightarrow \quad \lambda = -1$

No es necesario que busquemos el valor de la otra incógnita.

Obtengamos las coordenadas del punto P (sustituyendo el valor de λ en la recta r),

x = 4 + 3 (– 1) = 1
y = 4 + 2 (– 1) = 2
z = 4 + (– 1) = 3

luego P = (1 , 2 , 3)

b)

$$(\widehat{r,s}) = \left(\widehat{\vec{v}_r,\vec{v}_s}\right)$$

Como $\vec{v}_r = (3,2,1)$ *y* $\vec{v}_s = (1,2,3)$

$$\cos\left(\widehat{\vec{v}_r,\vec{v}_s}\right) = \frac{\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s}{\left|\vec{v}_r\right| \cdot \left|\vec{v}_s\right|} = \frac{(3,2,1)\,(1,2,3)}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}\,\sqrt{1^2+2^2+3^2}} = \frac{3+4+3}{\sqrt{14}\,\sqrt{14}} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

luego $\left(\widehat{\vec{v}_r,\vec{v}_s}\right) = 0'7752\ rds = 44'4153º$

Finalmente $(\widehat{r,s}) = 0'7752\ rds = 44'4153º$

c) Plano π que contiene a las rectas r y s.

Como las rectas r y s están en el plano π, entonces P (punto de corte entre r y s) es de π y los vectores directores de las rectas l serán del plano. La ecuación del plano podemos obtenerla como sigue:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x-1 \\ 2 & 2 & y-2 \\ 1 & 3 & z-3 \end{vmatrix} = 0$$

desarrollando por la tercera columna,

$$(x-1)\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (z-3)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

(x – 1) 4 – (y – 2) 8 + (z – 3) 4 =0, simplificando entre 4,

(x – 1) – (y – 2) 2 + (z – 3) =0

x – 1 – 2 y + 4 + z – 3 = 0

x – 2 y + z = 0

Solución: $\pi \equiv x - 2y + z = 0$