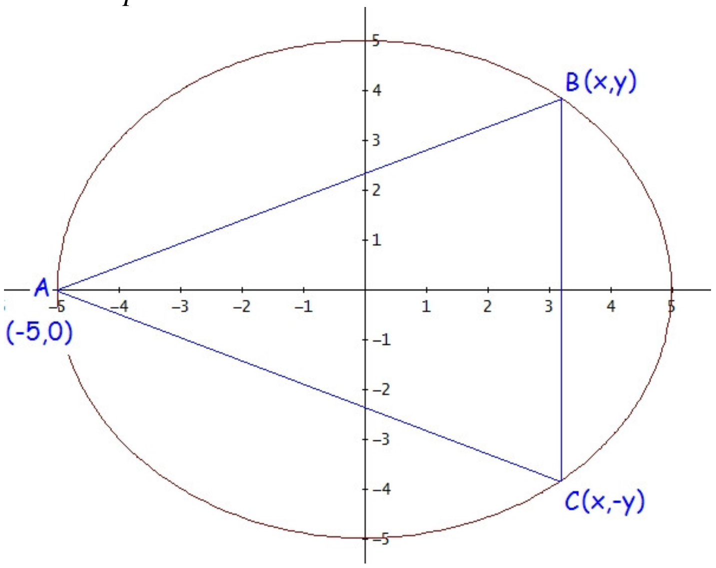
PROBLEMA B.3. Dos elementos de un escudo son una circunferencia y un triángulo. La circunferencia tiene centro (0,0) y radio 5. Uno de los vértices del triángulo es el punto A=(– 5,0). Los otros dos vértices del triángulo son los puntos de la circunferencia B=(x,y) y C=(x,– y). Se pide obtener razonadamente:

a) El área del triángulo en función de x. *(3 puntos)*
b) Los vértices B y C para los que es máxima el área del triángulo. *(5 puntos)*
c) El valor máximo del área del triángulo. *(2 puntos)*

Solución:
Gráficamente el problema es:



a) Área del triángulo

Por construcción es un triángulo isósceles, por lo que podemos calcular su área fácilmente.

$$A = \frac{b\,.\,h}{2}$$

siendo $b = 2y$, $h = 5 + x$ *(siendo* $-5 < x < 5$; *si* $x = -5$ *sería un punto y si* $x = 5$ *una recta)*

Debemos encontrar el valor de y en función de x. B y C son puntos de la circunferencia, obtengamos su ecuación.

Es una circunferencia de centro (0 , 0) y radio 5 $\rightarrow$ $(x-0)^2 + (y-0)^2 = 5^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 25$

Despejemos y:

$$y^2 = 25 - x^2$$

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2}$$

Luego $b = 2y = 2\sqrt{25 - x^2}$

El área del triángulo será $A(x) = \dfrac{2\sqrt{25-x^2}\ (5+x)}{2} = (5+x)\sqrt{25-x^2}$

siendo $-5 < x < 5$.

b) Máximo de A(x)

$$A(x) = (5+x)\sqrt{25-x^2} \qquad y \quad Dom\ A = [-5\ ,\ 5\ ]$$

$$A'(x) = \sqrt{25-x^2} + (5+x)\frac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}} = \sqrt{25-x^2} - \frac{x(5+x)}{\sqrt{25-x^2}}$$

$$A'(x) = 0$$

$$\sqrt{25-x^2}-\frac{x(5+x)}{\sqrt{25-x^2}}=0$$

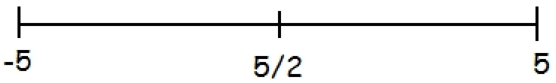
$$25-x^2-5x-x^2=0$$

$$25-2x^2-5x=0$$

$$2x^2+5x-25=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\,.\,2\,.\,(-25)}}{2\,.\,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25+200}}{4}=\frac{-5\pm\sqrt{25+200}}{4}=$$

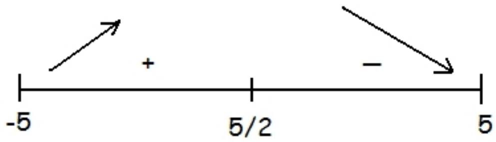
$$=\frac{-5\pm\sqrt{225}}{4}==\frac{-5\pm 15}{4}=\begin{cases}\dfrac{-5+15}{4}=\dfrac{10}{4}=\dfrac{5}{2}\\[2mm] \dfrac{-5-15}{4}=\dfrac{-20}{4}=-5\end{cases}$$

Estudiemos el signo de A´ para determinar máximos y mínimos. Considerando el dominio de A(x) y las soluciones de A´(x) =0, hay que estudiar A´ en los siguientes intervalos,



x	$A´$
0	$\sqrt{25-0^2}-\dfrac{0(5+0)}{\sqrt{25-0^2}}=5>0$
4	$\sqrt{25-4^2}-\dfrac{4(5+4)}{\sqrt{25-4^2}}=\sqrt{9}-\dfrac{36}{\sqrt{9}}=3-\dfrac{36}{3}=3-12=-9<0$

Es decir que,



Luego la función A(x) alcanza su máximo relativo en x = 5/2, como además A(x) es creciente a la izquierda de 5/2 y decreciente a la derecha, el máximo relativo es absoluto.
Por lo que el área del triángulo es máxima para x = 5/2.
Obtengamos los vértices B y C. Como estos vértices son simétricos respecto del eje OY, sólo obtendremos el valor positivo de y.

$$\text{Para} \quad x=\frac{5}{2} \quad \rightarrow \quad y=\sqrt{25-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{25-\frac{25}{4}}=\sqrt{\frac{100-25}{4}}=\sqrt{\frac{75}{4}}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$$

Luego el área del triángulo es máxima cuando los vértices B y C son:

$$B=\left(\frac{5}{2},\frac{5\sqrt{3}}{2}\right) \quad y \quad C=\left(\frac{5}{2},\frac{-5\sqrt{3}}{2}\right)$$

c) El valor máximo del área del triángulo, según lo calculado en el apartado anterior, será:

$$A\left(\frac{5}{2}\right)=\left(5+\frac{5}{2}\right)\sqrt{25-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{15}{2}\,\frac{5\sqrt{3}}{2}=\frac{75\sqrt{3}}{4}\approx 32´48\,u.a.$$