PROBLEMA A.1. Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y M, donde M es una matriz de dos filas y dos columnas que verifica $M^2 = M$. Obtener **razonadamente**:

a) Todos los valores reales k para los que la matriz $B = A - k\,I$ tiene inversa. *(2 puntos)*

b) La matriz inversa B^{-1} cuando $k = 3$. *(2 puntos)*

c) Las constantes reales α y β para las que se verifica que $\alpha\, A^2 + \beta\, A = -2\, I$. *(4 puntos)*

d) Comprobar razonadamente que la matriz $P = I - M$ cumple las relaciones: $P^2 = P$ y $M\,P = P\,M$. *(2 puntos, repartidos en 1 punto por cada igualdad)*

Solución:

a) Calculemos la matriz B.

$$B = A - k\,I = \begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix} - k\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}k & 0\\ 0 & k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-k & -2\\ 1 & 3-k\end{pmatrix}$$

Para que exista B^{-1} debe ser $|B| \neq 0$.

$$|B| = \begin{vmatrix}-k & -2\\ 1 & 3-k\end{vmatrix} = -k(3-k)+2 = -3k+k^2+2 = k^2-3k+2$$

$$k^2-3k+2=0 \quad\to\quad k=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4.1.2}}{2.1}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}=\begin{cases}\dfrac{3+1}{2}=2\\[2mm] \dfrac{3-1}{2}=1\end{cases}$$

Por lo tanto la matriz B tiene inversa para todos los números reales que sean distintos de 1 y 2, es decir $\forall k \in \Re - \{1,2\}$.

b) Para k = 3, según el resultado del apartado anterior, $\exists B^{-1}$

Para k = 3, $B=\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ *y* $|B|=\begin{vmatrix}-3 & -2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=2$

Procedamos al cálculo de B^{-1}. Cálculo de los menores: $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}$, *adjuntos:* $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & -3\end{pmatrix}$, *traspuesta* $\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & -3\end{pmatrix}$,

y finalmente $B^{-1}=\dfrac{1}{|B|}\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & -3\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \dfrac{-1}{2} & \dfrac{-3}{2}\end{pmatrix}$

c)

$$\alpha\, A^2 + \beta\, A = -2\, I$$

$$A=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -6\\ 3 & 7\end{pmatrix}$$

$$\alpha\begin{pmatrix}-2 & -6\\ 3 & 7\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2\alpha & -6\alpha-2\beta\\ 3\alpha+\beta & 7\alpha+3\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

Esta igualdad matricial da lugar al siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases}-2\alpha=-2\\ -6\alpha-2\beta=0\\ 3\alpha+\beta=0\\ 7\alpha+3\beta=-2\end{cases}$

De la primera ecuación obtenemos $\alpha=\dfrac{-2}{-2}=1$. *Sustituyendo este valor en la otras tres ecuaciones:*

$$\begin{cases}-6-2\beta=0\\ 3+\beta=0\\ 7+3\beta=-2\end{cases}$$

De la primera ecuación: $-2\beta=6 \quad\rightarrow\quad \beta=\dfrac{6}{-2}=-3$

De la segunda ecuación: $\beta=-3$

Y de la tercera: $3\beta=-2-7 \quad\rightarrow\quad 3\beta=-9 \quad\rightarrow\quad \beta=\dfrac{-9}{3}=-3$

Como de las tres ecuaciones obtenemos el mismo valor de β, β = – 3

Las constantes reales para las que se verifica la ecuación planteada son: $\alpha = 1$ *y* $\beta = -3$.

d) $P = I - M$ *y* $M / M^2 = M$.

¿$P^2 = P$?

$P^2 = (I - M)(I - M) = I - IM - MI + MM = I - M - M + M^2 = I - 2M + M = I - M = P$

(como I es la matriz identidad: $II = I$, $IM = M$, $MI = M$*)*

¿$MP = PM$?

$MP = M(I - M) = MI - MM = M - M^2 = M - M = 0$ *(M – M es la matriz cero)*

$PM = (I - M)M = IM - MM = M - M^2 = M - M = 0$

Por lo tanto, $MP = PM$