**PROBLEMA A.2.** En el espacio se dan las rectas

$$r:\begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = -1+2\lambda \\ z = 2+\lambda \end{cases} \qquad y \qquad s:\begin{cases} x+2y-1=0 \\ 3y-z+2+\alpha=0 \end{cases}$$

Obtener **razonadamente**:

a) El valor de $\alpha$ para el que las rectas $r$ y $s$ están contenidas en un plano. *(4 puntos)*

b) La ecuación del plano que contiene a las rectas $r$ y $s$ para el valor de $\alpha$ obtenido en el apartado anterior. *(2 puntos)*

c) La ecuación del plano perpendicular a la recta $r$ que contiene el punto ( 1, 2 , 1 ). *(4 puntos)*

*Solución:*

*Previamente vamos a obtener los vectores directores de ambas rectas.*

*Como la ecuación de la recta $r$ está dada en forma paramétrica, sabemos que* $\vec{v_r} = (1,2,1)$

*A partir de la ecuación de la recta $s$ , dada como intersección de dos planos, obtengamos la forma paramétrica Para ello de la primera ecuación despejamos la $x$ y de la segunda la $z$:*

$$s:\begin{cases} x = 1-2y \\ z = 2+\alpha+3y \end{cases} \quad \text{luego} \quad \begin{cases} x = 1-2\mu \\ y = \mu \\ z = 2+\alpha+3\mu \end{cases} \quad \text{por lo tanto} \quad \vec{v_s} = (-2,1,3)$$

a) *Las rectas $r$ y $s$ estarán contenidas en un plano si son paralelas o se cortan en un punto.*

*Veamos si son paralelas, ¿son proporcionales sus vectores directores?* ¿$\frac{1}{-2} = \frac{2}{1} = \frac{1}{3}$?

*Como* $\frac{1}{-2} \neq \frac{2}{1}$ *entonces los vectores no son proporcionales, las rectas no son paralelas.*

*En consecuencia las rectas $r$ y $s$ deben cortarse.*

*Para que se corten el siguiente sistema debe tener solución,* $\begin{cases} 3+\lambda = 1-2\mu \\ -1+2\lambda = \mu \\ 2+\lambda = 2+\alpha+3\mu \end{cases}$

*Arreglamos el sistema considerando que las incógnitas son* $\lambda$ *y* $\mu$, $\begin{cases} \lambda+2\mu=-2 \\ 2\lambda-\mu=1 \\ \lambda-3\mu=\alpha \end{cases}$. *Por ser un sistema de 2 incógnitas y 3 ecuaciones, para que tenga solución el determinante de la matriz ampliada debe ser nulo, es decir:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & \alpha \end{vmatrix} = 0 \;\rightarrow\; -\alpha+12+2-2+3-4\alpha=0 \;\rightarrow\; -5\alpha+15=0 \;\rightarrow\; -5\alpha=-15 \;\rightarrow\; \alpha=\frac{-15}{-5}=3$$

*Por lo tanto, para* $\alpha = 3$ *las rectas $r$ y $s$ están contenidas en un plano.*

b) $\alpha = 3$. *Busquemos el punto de corte entre $r$ y $s$ resolviendo el sistema del apartado anterior.*

$\begin{cases} \lambda+2\mu=-2 \\ 2\lambda-\mu=1 \\ \lambda-3\mu=\alpha \end{cases}$, *como* $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2-4=-5 \neq 0$ *y* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0$ *(obtenido en el apartado anterior), el sistema es compatible y determinado. Resolvemos el sistema usando las ecuaciones primera y segunda (las que aportan el menor de orden 2 no nulo):*

$\begin{cases} \lambda+2\mu=-2 \\ 2\lambda-\mu=1 \end{cases}$, *resolvámoslo por reducción, multiplicamos la segunda ecuación por 2:* $\begin{cases} \lambda+2\mu=-2 \\ 4\lambda-2\mu=2 \end{cases}$ *sumando ambas ecuaciones:* $5\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0$.

*Sustituyendo este valor de* $\lambda$ *en la recta* $r$ *obtendremos, P, el punto de corte buscado,* $\begin{cases} x = 3+0 = 3 \\ y = -1+2.0 = -1 \\ z = 2+0 = 2 \end{cases}$, *luego* $P(3,-1,2)$.

*La ecuación del plano que contiene a las rectas* $r$ *y* $s$ *viene determinada por el punto P y los vectores directores de* $r$ *y* $s$, $\vec{v}_r$ *y* $\vec{v}_s$. *La ecuación de este plano será:*

$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$, *desarrollando por la primera fila:* $(x-3)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - (y+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$,

*calculando los menores:* $(x-3)(6-1) - (y+1)(3+2) + (z-2)(1+4) = 0$

$5(x-3) - 5(y+1) + 5(z-2) = 0$, *simplificando entre 5,*

$(x-3) - (y+1) + (z-2) = 0$

$x - 3 - y - 1 + z - 2 = 0$

$x - y + z - 6 = 0$

*Solución: la ecuación del plano que contiene a las rectas* $r$ *y* $s$ *para* $\alpha = 3$ *es* $x - y + z - 6 = 0$

*c) Buscamos un plano* $\pi \,/\, \pi \perp r$ *y* $(1,2,1) \in \pi$

*Como* $\pi \perp r \rightarrow \vec{n}_\pi = \vec{v}_r = (1,2,1)$

*La ecuación del plano* $\pi$ *será:* $x + 2y + z + D = 0$

*Como debe contener al punto* $(1,2,1)$, $1 + 2 \cdot 2 + 1 + D = 0 \rightarrow 1 + 4 + 1 + D = 0 \rightarrow 6 + D = 0 \rightarrow D = -6$

*Finalmente, el plano* $\pi$ *será:* $x + 2y + z - 6 = 0$