PROBLEMA B.1. Se dan las matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

y T, y se sabe que T es una matriz cuadrada de 3 filas y 3 columnas cuyo determinante vale $\sqrt{2}$.
Calcular **razonadamente** los determinantes de las siguientes matrices, indicando explícitamente las propiedades utilizadas en su cálculo:

a) $\frac{1}{2}T$ *(3 puntos)*
b) M^4. *(3 puntos)*
c) $T\,M^3\,T^{-1}$. *(4 puntos)*

Solución:

$$a)\ det\left(\frac{1}{2}T\right) = (como \quad T \quad es \quad 3x3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 det(T) = \frac{1}{8}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

b) det (M^4) = (como det(A.B) = det(A) . det(B))=[det(M)]^4
Calculemos det(M),

$$det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_1 + F_3 \\ = F_2 + F_3 \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} desarrollando \ \ por \\ la \ \ tercera \ \ columna \end{pmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -1\,(6-12) = -(-6) = 6$$

Por lo que det (M^4) = 6^4 = 1296

c) Considerando que $det\left(T^{-1}\right) = \frac{1}{det(T)}$ *y que det(A.B) = det(A) . det(B) .*

$$det\left(T\ M^3\ T^{-1}\right) = det(T)\,det\left(M^3\right)det\left(T^{-1}\right) = det(T)\,\left[det(M)\right]^3\,\frac{1}{det(T)} = \left[det(M)\right]^3 = 6^3 = 216$$