

PROBLEMA B.2. Se da la recta

$$r: \begin{cases} x - 4y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \text{ y el plano } \pi_\alpha: (2 + 2\alpha)x + y + \alpha z - 2 - 6\alpha = 0, \text{ dependiente del parámetro real } \alpha.$$

Obtener **razonadamente**:

- La ecuación del plano π_α que pasa por el punto $(1, 1, 0)$. (3 puntos)
- La ecuación del plano π_α que es paralelo a la recta r . (4 puntos)
- La ecuación del plano π_α que es perpendicular a la recta r (3 puntos).

Solución:

a) Como el punto $(1, 1, 0)$ pertenece al plano π_α :

$$(2 + 2\alpha) \cdot 1 + 1 + \alpha \cdot 0 - 2 - 6\alpha = 0$$

$$2 + 2\alpha + 1 - 2 - 6\alpha = 0$$

$$-4\alpha + 1 = 0$$

$$-4\alpha = -1 \rightarrow \alpha = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$$

Por lo que la ecuación del plano pedido será:

$$\left(2 + 2 \cdot \frac{1}{4}\right)x + y + \frac{1}{4}z - 2 - 6 \cdot \frac{1}{4} = 0$$

$$\left(2 + \frac{1}{2}\right)x + y + \frac{1}{4}z - 2 - \frac{3}{2} = 0$$

$$\frac{5}{2}x + y + \frac{1}{4}z - \frac{7}{2} = 0$$

$$10x + 4y + z - 14 = 0$$

Solución: $\pi_\alpha: 10x + 4y + z - 14 = 0$

b) Como π_α debe ser paralelo a la recta r , $\vec{n}_{\pi_\alpha} \perp \vec{v}_r$

$$\vec{n}_{\pi_\alpha} = (2 + 2\alpha, 1, \alpha)$$

Calculemos el vector director de la recta r , \vec{v}_r

$$\text{Como } r: \begin{cases} x - 4y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 4y \\ z = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow \vec{v}_r = (4, 1, 1)$$

Puesto que debe ser $\vec{n}_{\pi_\alpha} \perp \vec{v}_r \rightarrow (4, 1, 1) \cdot (2 + 2\alpha, 1, \alpha) = 0$

$$8 + 8\alpha + 1 + \alpha = 0; \quad 9 + 9\alpha = 0; \quad 9\alpha = -9; \quad \alpha = \frac{-9}{9} = -1$$

Sustituyendo el valor de α en el plano π_α :

$$(2 + 2 \cdot (-1))x + y + (-1)z - 2 - 6(-1) = 0$$

$$(2 - 2)x + y - z - 2 + 6 = 0$$

$$y - z + 4 = 0$$

La ecuación del plano π_α será: $y - z + 4 = 0$

c) Como π_α debe ser perpendicular a la recta r , $\vec{n}_{\pi_\alpha} \parallel \vec{v}_r$

$$\text{Por lo tanto debe cumplirse: } \frac{2+2\alpha}{4} = \frac{1}{1} = \frac{\alpha}{1} \rightarrow \begin{cases} \frac{2+2\alpha}{4} = \frac{1}{1} \rightarrow 2+2\alpha=4 \rightarrow 2\alpha=2 \rightarrow \alpha=1 \\ \frac{1}{1} = \frac{\alpha}{1} \rightarrow \alpha=1 \end{cases}$$

Luego $\alpha = 1$

Sustituyendo el valor de α en el plano π_α :

$$(2 + 2 \cdot 1)x + y + 1 \cdot z - 2 - 6 \cdot 1 = 0$$

$$4x + y + z - 8 = 0$$

$$4x + y + z - 8 = 0$$

La ecuación del plano π_α será: $4x + y + z - 8 = 0$